

VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática



ULBRA - Canoas - Rio Grande do Sul - Brasil

16, 17 e 18 de outubro de 2013

Comunicação Científica



INCOMENSURABILIDADE E NÚMERO IRRACIONAL: A ANTIFAIRESE COMO INTERFACE ENTRE O GEOMÉTRICO E O ARITMÉTICO

Fernando Augusto da Silva Souza¹

Fernando Raul Neto²

História da Matemática, História da Educação Matemática e Cultura

RESUMO:

Neste artigo trataremos da abordagem do conceito de número irracional nos livros didáticos de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental tendo como referência a história da matemática. Objetivamos mostrar que a introdução do conceito de número irracional nos referidos livros é realizada com certa dificuldade e que há subsídios didáticos e históricos como o processo da antifairese contida nos *elementos* de Euclides que pode contribuir para esta introdução. Tal fato nos remete exatamente ao momento histórico da transição das grandezas comensuráveis para as grandezas incomensuráveis vivido pelos matemáticos gregos em meados do primeiro Milênio a.C. e revivido, não mais do ponto de vista matemático, mas sim do pedagógico quando este conteúdo é apresentado na segunda metade dos anos finais do ensino fundamental.

Palavras Chaves: Livro didático. Números irracionais. Antifairese. História da matemática.

INTRODUÇÃO

Qual a causa da introdução do conceito de número irracional nos dias atuais ser apresentada, na maior parte dos Livros Didáticos do Ensino Fundamental de matemática, por meio apenas do Eixo Números e Operações? O fato de chamarmos de “número irracional” as grandezas incomensuráveis teria influência neste sentido? Quais os benefícios de uma articulação entre a geometria e a aritmética para a introdução de tal conceito numa perspectiva histórica?

As indagações anteriores refletem nossa inquietação com relação aos Livros Didáticos de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental no que diz respeito à abordagem inicial

¹ Mestrando do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco (PPG – EDUMATEC – UFPE). f.augusto13@hotmail.com

² Ph. D. Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). feraneto@uol.com.br

do conjunto dos números reais. O interesse pela temática eclode, a princípio, de questionamentos advindos da nossa própria prática pedagógica tanto na Educação Básica como na docência do Ensino Superior no que diz respeito à utilização do Livro Didático de matemática. Por outro lado, os questionamentos que surgiram durante as aulas da disciplina Tópicos em História da Matemática no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco (PPG - EDUMATEC – UFPE), no segundo semestre de 2011 ministradas pelo Professor Dr. Fernando Raul de Assis Neto, potencializaram nosso desejo inicial sobre o aprofundamento na temática da descoberta da incomensurabilidade, o que nos levou a outras duas pesquisas anteriores (SOUTO, 2010) e (ARAÚJO, 2011). Na primeira é feita uma investigação em nove coleções de livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD 2007) e cinco coleções de livros didáticos de matemática do Ensino Médio do Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM 2008), sobre como o conceito de número irracional é organizado; que registros de representação são empregados e como essa organização se propõe a promover a aquisição do conhecimento de número irracional. Na segunda pesquisa é apresentada uma proposta didática, na qual consta uma série de atividades para serem aplicadas em processos de formações continuadas com a finalidade de introduzir o conceito de número irracional com base na História da Matemática.

A hipótese desta pesquisa aponta que a forma com que a temática dos números irracionais é tratada nos Livros Didáticos de matemática não é, do ponto de vista didático, satisfatório. Em nossa análise crítica das coleções aprovadas pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD 2014), presente em nossa pesquisa de mestrado, em fase de conclusão, fica claro que o problema em tela não é de ordem matemática, mas sim, de ordem didática. Ou seja, o conjunto dos números reais é conhecido, mas é necessário que seja apresentado aos estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental que ainda não o conhecem. Tal fato nos conduziu a uma analogia: os estudantes deste nível de escolaridade se encontram em um momento filosófico semelhante aos matemáticos gregos de meados do primeiro Milênio a.C., no que se refere ao estágio histórico da descoberta das grandezas incomensuráveis.

O objetivo geral de nossa pesquisa a qual originou a escrita deste artigo é, portanto, investigar a introdução do conceito de número irracional nos livros didáticos de matemática da segunda metade dos anos finais do Ensino Fundamental, ou seja, oitavo e nono ano das coleções aprovadas pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD 2014) à luz da história da matemática. Porém, para este artigo, apresentaremos nossa pesquisa referente ao PNLD 2011,

tendo em vista que, até o momento da submissão deste trabalho, o PNLD 2014 não havia sido publicado. Os objetivos específicos estão elencados a seguir: investigar como a história da matemática pode contribuir para elucidar a introdução do conceito de número irracional; verificar se as notas históricas contidas no Livro Didático contribuem para o entendimento dos números irracionais; mostrar como o processo da antifairese pode servir como instrumento introdutório para o conceito de número irracional. Não é nosso interesse realizar uma Sequência Didática que atenda ou resolva o problema da introdução do conceito de número irracional, mas adentrar, sobretudo, no universo da História da Matemática com a finalidade de verificar quais os recursos e contribuições que ela nos fornece disponibilizando-os, em seguida, para possíveis construções de Sequências Didáticas em pesquisas posteriores corroborando com a nossa assertiva, ou seja, a dificuldade da introdução do conceito de número irracional na segunda metade dos anos finais do Ensino Fundamental.

O presente trabalho é de caráter bibliográfico e análise documental. Esse material, por sua vez, poderá ser encontrado em livros, artigos, revistas e periódicos que tratem do tema abordado pela pesquisa além de documentos oficiais, relacionados à educação brasileira, que abordam a linha de pesquisa de Didática da Matemática relacionada à História da Matemática.

OS NÚMEROS IRRACIONAIS NOS LIVROS DIDÁTICOS

Encontramos convergência de opinião em (PEREIRA, 2005; PASQUINI, 2007; SOUTO, 2010; ARAÚJO, 2011) os quais são unânimes na afirmação de que esta temática tem grande relevância e serve de alicerce para a matemática do Ensino Superior e que a gama de dificuldades tradicionalmente apresentadas na literatura deve-se, em grande parte, à falta de habilidade com os números irracionais.

Quanto à abordagem inicial dos números irracionais por parte do Livro Didático de matemática, Gratuliano (2006) observou que a definição de número irracional se dá no oitavo ano do Ensino Fundamental, porém o conteúdo volta a ser revisitado no nono ano do Ensino Fundamental “através de regras para operar com os radicais”, mas que não possibilita para o estudante a percepção da utilidade deste conteúdo. Ainda na observação de Gratuliano (2006), os estudantes do Ensino Médio “não conseguem entender que o conjunto dos números irracionais é parte dos números reais, ficando sua aplicação restrita a racionalização de denominadores”.

Na ótica de Baroni e Nascimento (2005) o fundamento da Análise Real depende de um entendimento sólido dos números irracionais. Partindo do pressuposto anteriormente citado sobre a importância deste conjunto numérico, Souto (2010) afirma que, em geral, a abordagem dos Livros Didáticos não privilegia um aprofundamento conceitual tendo em vista que as atividades são tratadas, em sua maioria, de forma mecânica. De acordo com Miguel (1993), os números irracionais são tratados nos livros didáticos de matemática como “um amontoado de regras” com uma finalidade operatória sem uma “justificativa convincente” o que resulta em uma falta de interesse por parte dos estudantes. Não ficam claras, na ótica deste autor, a utilidade, o desafio e as aplicações deste conteúdo havendo ainda, uma desconexão com os demais temas do programa de matemática.

Neste aspecto, de articulação com outras áreas da matemática, (PASQUINI, 2007) apresenta uma proposta de introdução dos números irracionais através de medições e comparações de segmentos. Nos chama bastante atenção os dados da pesquisa de (PEREIRA, 2005) que analisou livros didáticos do final do Século XIX e do século XX verificando que, com o passar do tempo, houve uma ausência da noção de medida como fator de introdução para os números irracionais. Na pesquisa acima citada, verificou-se que apenas um dos sete livros analisados tratava sobre o tema das grandezas incomensuráveis com exemplos e demonstrações geométricas.

O fato dos números irracionais serem tratados, na maioria dos casos, apenas como números e não como medidas, segundo as fontes acima pesquisadas, trouxe-nos uma inquietação que nos leva, inevitavelmente, a uma investigação histórica com vistas à reconstrução do conceito de número irracional.

Para Boyer (1996) antes que a álgebra moderna chegasse ao seu advento, o livro X dos *Elementos de Euclides* era o mais admirado. Nele estão classificados sistematicamente os segmentos incomensuráveis, escritos hoje em notação moderna, do tipo $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ e $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$, com a e $b \in Q$. Estruturas algébricas muito comuns nos livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental. Contudo, na visão deste autor, o matemático grego Euclides, no livro X se referia, na verdade, à geometria e não a aritmética. Ainda segundo Boyer (1996), o livro X trata exatamente sobre os números irracionais e, além das 115 proposições, fato que sobrepuja os demais livros, encontra-se, no livro X, teoremas equivalentes para racionalização de denominadores das frações da forma $a/(b \pm \sqrt{c})$, e $a/(\sqrt{b} \pm \sqrt{c})$.

É interessante ressaltar também a importância do Livro Didático para estudantes e professores. No caso específico do Ensino da Matemática, o livro utilizado como guia para os estudantes da idade média até o início do Século XX era o próprio *Elementos* de Euclides. Com o passar dos tempos, os livros didáticos assumem um papel estratégico no contexto pedagógico com grandes inovações objetivando um melhor entendimento dos conteúdos. Para Gérard; Roegiers (1998) o livro didático, dentre outros vários aspectos positivos, deve “ultrapassar os limites de transmitir conhecimentos de forma linear que não leve em consideração o real percurso e interesse do aluno”.

CATEGORIAS DE ANÁLISE EM RELAÇÃO À HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Segundo Jankvist (2009), a história da Matemática é dividida em duas concepções ou classes, a saber: História da Matemática como ferramenta e História da matemática como meta. A primeira diz respeito ao fato da História da Matemática ser encarada como um instrumento ou ferramenta didática enquanto que a segunda concepção ou classe se refere a sua utilização como um fim em si mesma, um objetivo, uma meta. Jankvist (2009, p.16). Na ótica de Jankvist (2009), independentemente do modo com que a história da matemática seja encarada há três categorias que sempre estarão presentes como já vimos acima e trataremos delas a partir de então: Abordagem de Iluminação, Abordagem Modular e Abordagem Histórica.

A Abordagem de Iluminação consiste em informações históricas pontuais ou suplementares que segundo Tzanakis e Arcavi (2000) apud Jankvist (2009, p. 247) São “informações factuais isoladas” ou “trechos históricos”, os quais podem ser nomes, datas, obras famosas e eventos, gráficos de tempo, biografias e problemas famosos. Há também questões como anedotas e contos entre outros semelhantes se enquadram nesta categoria. Este tipo de abordagem é muito frequente nos livros didáticos e, geralmente aparecem nas introduções ou nas partes finais dos capítulos dos referidos livros.

Já a Abordagem Modular se refere a “unidades de ensino dedicadas à história e, muitas vezes, elas se baseiam em casos”. (JANKVIST, 2009, p. 12). Segundo este autor o termo “módulo” é devido a Katz e Michalowicz (2004). Estes módulos possuem fortes laços com o currículo, mas não necessariamente o seguem a risca. Ocupam dois ou três períodos de aula e geralmente já devem estar planejados e prontos para a sua utilização em sala de aula.

Abordagem Histórica por sua vez é uma categoria que propõe uma imersão no contexto histórico também chamado de abordagem genética. Neste tipo de abordagem há uma investigação mais acurada do cenário e das circunstâncias que estavam por trás do fato em si, possibilitando assim uma reconstrução ou reconstituição do momento vivido pelos atores em suas situações numa tentativa de uma aproximação cada vez maior possibilitando ao estudante a descoberta do conceito. É, portanto, esta categoria, que mais se enquadra em nosso percurso metodológico.

BREVE PANORAMA HISTÓRICO

Acreditamos que a História em geral foi, e é naturalmente concebida com a contribuição de todos os povos e culturas ao redor do mundo nas mais diversas épocas da odisseia humana. Em nosso caso, a História da Matemática também segue os mesmos passos, e não seria uma história separada da História geral como conhecemos, mas uma vertente desta já citada ciência. Todavia, do ponto de vista documental, por diversos motivos, a matemática grega é sem sombra de dúvidas a maior fonte de contribuição e, sobretudo, de influência sobre os matemáticos das gerações subsequentes espalhados por todo o mundo até os dias atuais. Ao tratar dessa temática D'Ambrósio afirma:

Ao abordar o conhecimento matemático e tomar como referência a ciência acadêmica, estamos focalizando uma determinada região e momento na evolução da humanidade. De fato, ao nos referirmos à Matemática estamos identificando o conhecimento que se originou nas regiões banhadas pelo Mar Mediterrâneo. Mesmo reconhecendo que outras culturas tiveram influência na evolução dessa forma de conhecimento, sua organização intelectual e social é devida aos povos destas regiões. Por razões várias razões, ainda pouco explicadas, a civilização ocidental, que resultou dessas culturas, veio a se impor a todo planeta. Com essa hegemonia, a Matemática cuja origem remonta às civilizações mediterrâneas, particularmente à Grécia antiga, também se impôs a todo o mundo. Uma afirmação muito frequente é que a Matemática é uma só, é universal. (D'Ambrósio, 2004, p. 39)

Segundo Eves (2004), a Grécia dos últimos séculos do segundo milênio a.C., proporcionou ao mundo uma experiência de mudanças significativas e transformadoras nos cenários da política e da economia. Nesta época, de grande avanço comercial e, sobretudo, intelectual, com o surgimento de escolas de pensadores denominadas “academias”, começam a lançar os primeiros fundamentos da matemática da forma como a conhecemos atualmente. Nas praças ou “*ágoras*” onde era praticado o comércio, também eram encontrados vários

pensadores, os quais discursavam e ensinavam regularmente propagando suas ideias. Naturalmente, nas “*ágoras*” transitavam povos de muitos outros lugares, fato que potencializou a propagação dos saberes filosóficos daqueles sábios gregos como podemos constatar a seguir:

A despeito da desunião política, da escassez de alimentos, da superpopulação e do quase permanente estado de guerra, o Período Helênico grego (800 – 336 a.C.) testemunhou realizações intelectuais extraordinárias. Nas “*ágoras*” de Atenas e de outras cidades-Estado, os filósofos ensinavam seus discípulos e lançavam novas ideias. Foi nessa época que se escreveram histórias reais pela primeira vez: a descrição otimista das gloriosas vitórias gregas sobre os invasores persas feitas por Heródoto (484? – 424? a.C.) e o relato angustiado da luta fratricida entre Esparta e Atenas foi feita por Tucídides (460? – 400? a.C.). Foi também nesse período que se assistiu pela primeira vez ao emprego do raciocínio dedutivo em matemática – o que se deve a Tales de Mileto (640? – 564? a.C.) e Pitágoras (586? – 500 a.C.). (Eves, 2004, p. 92).

Partindo para o contexto específico da matemática grega da fase final do segundo milênio a.C. segundo Eves (2004) a principal fonte de informações com relação ao início da matemática grega é o *Sumário Eudemiano*, de autoria de Proclo Lício, um filósofo neoplatônico do Século V d.C., nascido na região da Lícia tendo, posteriormente, ido para Atenas tendo ali permanecido até o fim de seus dias. O *Sumário Eudemiano* é, portanto, um resumo de como a matemática grega se desenvolveu desde o seu início até a época de Euclides. Ainda segundo Eves (2004), ainda que Proclo tenha vivido após o intervalo de aproximadamente mil anos de distância dos mais importantes acontecimentos da matemática grega do Século V, ele teria tido ainda acesso a muitos trabalhos históricos, hoje perdidos. O título de tal obra, o *Sumário Eudemiano* deve-se exatamente ao matemático grego Eudemo, discípulo de Aristóteles. Ainda no *Sumário Eudemiano*, encontramos os relatos das obras de Tales de Mileto bem como os relatos sobre a obra do matemático cuja vida é cercada de mistérios e superstições: Pitágoras de Samos. Como sabemos não se sabe com exatidão sobre a autoria dos ensinamentos deste matemático, se dele próprio ou se de seus discípulos não sendo nossa intenção adentrar por tal investigação no momento.

TUDO É NÚMERO?

Para os pitagóricos todo o universo era constituído por números inteiros e suas razões. Ou seja, as grandezas comensuráveis. Como sabemos, a escola pitagórica é envolta por uma grande névoa misteriosa devida à falta de documentos históricos que comprovem a autoria das

afirmações atribuídas ao seu suposto líder. Eles acreditavam que todos os problemas da vida poderiam ser solucionados com tais saberes. Naturalmente, a vida em seu curso natural foi mostrando que nem tudo era como se pensava a princípio. Segundo Boyer (1974), os números inteiros e suas razões se mostraram insuficientes para demonstrar propriedades básicas como a relação entre o lado e a diagonal de um quadrado, bem como, lado e diagonal de um pentágono, pois tais segmentos são incomensuráveis. Por menor que seja a unidade adotada, ainda assim, nunca haverá uma medida comum entre estes segmentos anteriormente citados.

São conhecidos muitos contos sobre a descoberta da incomensurabilidade, contudo, segundo Boyer (1974), não se sabe exatamente quando ou como isto aconteceu. Uma análise mais sensata sugere que esta descoberta não tenha sido motivo para escândalos ou conflitos, mas que, de fato mereça lugar de destaque na História da Matemática e na própria História do desenvolvimento intelectual humano.

A ANTIFAIRESE

Na ótica de Araújo (2011), os *Elementos* de Euclides apresentam duas formas distintas para a teoria das proporções: uma versão contida no Livro VII relacionada à razão de números inteiros e atribuída aos pitagóricos. A segunda, relacionada às grandezas incomensuráveis, presente no Livro V, atribuída ao matemático platônico, Eudoxo. O autor acima citado comenta sobre o um método que poderia articular grandezas comensuráveis e incomensuráveis.

Entendemos, então, que a reconstrução de Fowler, baseada no trabalho de Knorr, propõe a existência de uma teoria das razões baseada no método das subtrações recíprocas que era capaz de tratar satisfatoriamente grandezas e números. A essa noção de razão Fowler dá o nome de *razão antifairética*, com referência ao método de antifairese, que significa, literalmente, subtrações recíprocas. (Araújo, 2011, p. 17)

Segundo Fowler (1999), a palavra de origem grega *Antifairesis* advém do verbo *antufairein* (ανθυφαιρειν) encontrado nos livros VII e X dos *Elementos* de Euclides. Significa literalmente “subtrações recíprocas”, ou ainda “subtrações mútuas”. Sendo assim, o processo que realiza subtrações mútuas, recíprocas ou repetidas é chamado, portanto, de “antifairese”, enquanto que o resultado deste processo é chamado de “razão antifairética”. O termo pode ser fragmentado para um melhor entendimento do leitor como segue: *Anto* = recíproco; *Hypo* = sub; *Hairesis* = tração. Conforme verificado nos *Elementos* por Fowler (1999) este processo era utilizado por Euclides para encontrar a maior medida comum entre duas grandezas como

também critério para a verificação da incomensurabilidade. O Autor acima citado afirma que o processo da antifairese não se dá através da divisão, mas sim, através da subtração. Sendo assim, Fowler (1999), evita nomenclaturas modernas tais como “algoritmo de Euclides” e “frações contínuas”. Por um lado, o algoritmo de Euclides é baseado no processo de divisão enquanto que as frações contínuas são concebidas através dos números reais com processos atuais e sofisticadas de generalização de frações.

A proposta do autor acima citado se baseia numa abordagem diferente, ou seja, uma abordagem heurística. Uma abordagem que consiste em reconstruir os passos adotados pelos gregos apoiados na aritmética e nas demonstrações geométricas.

ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

Foram analisadas de forma preliminar, em nossa pesquisa, as dez coleções de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental aprovadas pelo PNLD 2011 segundo (BRASIL, 2010), de acordo com a tabela abaixo:

Tabela 01 – Títulos das dez coleções aprovadas pelo PLND 2011 com os seus respectivos autores e editoras:
Continua

TÍTULO DA OBRA	AUTORES	EDITORA
MATEMÁTICA	Edwaldo Bianchini	Ed. Moderna.
A CONQUISTA DA MATEMÁTICA	José Ruy Giovanni e Benedicto Castrucci	Ed. FTD.
APLICANDO A MATEMÁTICA	Alexandre Luis Trovon de Carvalho	Casa Publicadora Brasileira.
MATEMÁTICA – IDEIAS E DESAFIOS	Iracema e Dulce	Ed. Saraiva.
MATEMÁTICA	Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis	Ed. Moderna.

Fonte: pesquisa bibliográfica PNLD 2011

Tabela 01 – Títulos das dez coleções aprovadas pelo PLND 2011 com os seus respectivos autores e editoras:
Conclusão

TÍTULO DA OBRA	AUTORES	EDITORA
MATEMÁTICA E REALIDADE	G. Iezzi, O. Dolce, e A. Machado.	Ed. Saraiva.
MATEMÁTICA NA MEDIDA CERTA	José Jakubovic e Marília Ramos Centurión	Ed. Saraiva.
PROJETO RADIX – MATEMÁTICA	Jackson Ribeiro	Ed. Scipione.
TUDO É MATEMÁTICA	Luiz R. Dante	Ed. Ática.
VONTADE DE SABER MATEMÁTICA	Joamir Souza e Patrícia M. Pataro	Ed. FTD.

Fonte: pesquisa bibliográfica PNLN 2011

Nesta análise preliminar, analisamos os livros do PNLN – 2011, como já fora dito anteriormente, pelo fato do PNLN – 2014, nosso foco principal, ainda não ter sido publicado até o momento da submissão deste artigo.

CONSIDERAÇÕES

Acreditamos que o presente estudo possa contribuir para uma reflexão no que diz respeito à forma com que os números irracionais são introduzidos nos anos finais do Ensino Fundamental através dos Livros Didáticos de matemática. Como já dissemos anteriormente, entendemos que o problema desta pesquisa não é de ordem matemática, mas sim de ordem didática. Contudo há uma estreita relação filosófica em que os estudantes da segunda metade dos anos finais do Ensino Fundamental se deparam com a transição de grandezas comensuráveis para as grandezas incomensuráveis.

Neste aspecto, surge o desafio docente, aliado ao Livro Didático, de apresentar o conceito de número irracional numa perspectiva plural, multifacetada, lançando mão dos mais variados recursos para tal feito. Em nosso caso, propomos uma abordagem histórica que contempla uma interface entre a geometria e a aritmética, tendo como elo o processo histórico da antifaixese.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, M. P. F. de. **Introdução ao conceito de números Reais: uma proposta didática baseada na história da matemática.** Dissertação (Mestrado em Ensino da matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ/IM. Programa de pós-graduação em ensino da matemática, 2011.
- BARONI, R. L. S. & NASCIMENTO, V. **Um Tratamento Via Medição, para os Números Reais.** Rio Claro: SBHMat, 2005.
- BOYER, C. B. **História da matemática:** tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. da universidade de São Paulo, 1974.
- D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Etnomatemática e educação. In: KNIJINIK, Gelsa; WANDERER, Fernanda; OLIVEIRA, Cláudio José de. **Etnomatemática, currículo e formação de professores.** Santa Cruz do Sul: EDUNISC, 2004.
- EUCLIDES. **Os Elementos.** Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.
- FOWLER, D. H. **The Mathematics of Plato's Academy. A new reconstruction.** Oxford and New York: Clarendon Press, 1999.
- GERÁRD, F. M., & ROEGIERS, X. **Conhecer e avaliar manuais escolares.** Porto: Porto Editora, 1998.
- GRATULIANO, Erigoi Alves da Silva. **Um estudo sobre a aprendizagem de números irracionais no Ensino Médio.** Tese de Doutorado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN, 2006.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos: PNLD 2011: Matemática.** Brasília, 2010.
- JANKVIST, U. T. **A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education.** *Educational studies in mathematics*, v. 71, p. 235-261, 2009.
- KATZ, V. J., & MILACHOWICZ, K. D. (Eds.) (2004). **Historical modules for the teaching and learning of mathematics.** Washington, DC: The Mathematical Association of America.
- MIGUEL, A. **Três Estudos Sobre História.** Tese de doutorado. Campinas: Unicamp, 1993.
- PASQUINI, R. C. G. **Um tratamento para os números reais via medição de segmentos: uma proposta, uma investigação.** Tese (Doutorado em Ensino da matemática). Universidade Estadual Paulista – UNESP, 2007.
- PEREIRA, A. C. C. **Teorema de Thales: uma conexão entre os aspectos geométrico e algébrico em alguns livros de matemática.** Dissertação (Mestrado em Ensino da matemática). Universidade Estadual Paulista – UNESP, 2005.

SOUTO, A. M. Análise dos conceitos de Número Irracional e Número Real em Livros Didáticos da Educação Básica. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Instituto de Matemática – IM, 2010.