LINGUAGEM E TRATAMENTO DE ERROS MATEMÁTICOS NO PROCESSO DE MODELAGEM

Roberta Modesto Braga[1]

Adilson Oliveira do Espírito Santo[2]

MODELAGEM MATEMÁTICA

Resumo: Neste artigo apresento algumas discussões sobre a linguagem utilizada por alunos do curso de Licenciatura Plena em Matemática no tratamento de erros matemáticos em processo de Modelagem Matemática. A partir de registros recortados de atividades de Modelagem Matemática realizadas na disciplina de Cálculo II, pude analisar as contribuições do uso da linguagem para o tratamento do erro matemático evidenciado no processo de Modelagem Matemática.
Palavras-chave: Modelagem Matemática. Linguagem. Erros Matemáticos

1 Introdução

A preocupação com o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial Integral, tem origem na graduação quando a aplicação repetidas vezes de uma regra ou exercícios similares que somados a experiência enquanto professora de Cálculo me levou a questionar e refletir sobre os conceitos matemáticos e sua construção.

Nesse cenário, passei a perceber a influência que a linguagem matemática interfere no processo de ensinar e aprender o Cálculo Diferencial e Integral, um dos ramos da Matemática que é considerado ciência básica para os cursos das áreas exatas, ou seja, é tratado como linguagem básica e um capital que deve ser adquirido/incorporado pelo estudante. No entanto, os termos e símbolos matemáticos utilizados “pegam” alunos de surpresa e saber utilizar a linguagem matemática envolvida nesse contexto não reflete apenas a uma lista de regras e procedimentos que os alunos devam seguir compulsivamente.

[1] Mestre. Universidade Federal do Pará. robertabraga@ufpa.br
[2] Doutor. Universidade Federal do Pará. adilson@ufpa.br

O Cálculo desde a sua origem, já apresentava divergências que constam dos estudos de Newton e Leibniz, por exemplo, na questão da simbologia do Cálculo Diferencial e Integral, como mostra o quadro 1:

Quadro 1: Simbologia de Derivada e Integral

Matemático	Derivadas	Integrais
Newton	$\dot{y}$	
Leibniz	$\frac{dy}{dx}$	$\int xdy$ e $\int ydx$

Muitas foram às tentativas de programar aulas de Cálculo que dessem conta de dar sentido aos conceitos, pois

> Aprender Cálculo Diferencial e Integral significa não apenas dominar as técnicas de cálculo, mas também, ter compreensão dos conceitos, percebê-los no cotidiano e saber utilizá-los como ferramenta para a solução de problemas do cotidiano. (FERRUZZI, 2003, p.126)

Assim, busquei na Modelagem Matemática possibilidades de superar dificuldades no ensino de Cálculo, pois propõe a criação de modelos matemáticos a partir de uma realidade, seja do cotidiano ou da própria matemática que podem ser materializados em estruturas matemáticas, para compreender melhor a realidade matemática das coisas.

Ou seja, encontrei na Modelagem Matemática um refúgio para lidar com as aulas de Cálculo satisfatoriamente, de forma a ajudar os alunos a entender as ideias matemáticas e me fez compreender que

> "é fundamental que os alunos saibam aprender, saibam que nunca vamos conseguir ensinar ou mostrar toda a Matemática de eles vão necessitar. O que precisamos fazer é habilitar os alunos aprender e a ter confiança em si próprios de que conseguirão fazê-lo." (MEYER,CADEIRA e MALHEIROS, 2011, p.26)

No entanto foi cursando uma disciplina denominada Tradução de Textos Matemáticos que percebi que o uso da linguagem no processo de Modelagem Matemática é que permite que se alcance a compreensão dos conceitos, mais ainda quando esta compreensão está associada a um erro matemático, seja ele simples ou complexo, discutido e amplamente refletido pelos alunos em ambiente de ensino e aprendizagem ao mesmo tempo em que os habilita a aprender.

Assim organizamos este trabalho com o objetivo de analisar as contribuições do uso da linguagem para o tratamento do erro matemático evidenciado no processo de Modelagem Matemática. Para este trabalho fugimos da sequencia cartesiana que em geral se adota para descrever resultados de pesquisas. Então optamos por entrelaçar a teoria aos recortes referentes a erros matemáticos derivados de algumas experiências de Modelagem Matemática desenvolvidas em duas etapas: exercícios de Modelagem Matemática e Experimentos em Modelagem Matemática, ambas com alunos de Cálculo II, do curso de Licenciatura Plena em Matemática.

Na primeira etapa denominada exercícios de Modelagem Matemática, os alunos eram convidados a fazer modelagem a partir de situações problemas e desta forma os conteúdos iam surgindo com a necessidade; e na medida em que os erros surgiam, estes iam sendo tratados. Já na segunda etapa os alunos escolheram temas de interesse tais como: Resfriamento de Newton; Crescimento populacional de eleitores; Densidade; A morte de espermatozoides; A deterioração do fígado e Destilação da água do sal, para fazer modelagem seguindo os passos descritos por Bassanezi (2004).

Assim as análise os recortes feitos dos erros nesse processo se deu de forma a compreender e analisar as contribuições do uso da linguagem para o tratamento do erro matemático evidenciado no processo.

2 Linguagem e Erros Matemáticos em processo de Modelagem Matemática

Na sequência apresento os recortes de erros cometidos pelos alunos do curso de licenciatura em Matemática ocorridos em aulas de Cálculos e os respectivos desmembramentos devido a linguagem, a Modelagem Matemática e o repertório dos alunos.

Em um trecho dialogado entre a turma e uma aluna desenvolvendo seu raciocínio no quadro, a passagem ocorrida da resolução de um problema sobre declividade, a **Aluna E** registrou:

$$\frac{dy}{dx} = 3y^2 \Rightarrow \int \frac{dy}{3y^2} = \int dx \text{ e escreveu } \int \frac{dy}{3y^2} = \ln(3y^2) \ \textbf{(1)}$$

Para o caso (1), a maioria da turma se manifestou dizendo que o procedimento estava errado e o **Aluno O** acrescentou que a **Aluna E** deveria ter utilizado a regra da potência $\left[\int u^n.du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c\right]$, organizando da seguinte forma no quadro:

$$\int y^{-2}dy = \frac{y^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{y^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{y} + c$$

Quando a **Aluna E** foi questionada sobre por que $\int \frac{dy}{3y^2} = \ln(3y^2)$, essa aluna deu a seguinte explicação:

"Eu disse que $\int \frac{dy}{3y^2} = \ln(3y^2)$, *porque já tínhamos utilizados outras vezes* $\int \frac{dy}{y} = \ln|y|$, *então achei que a regra serviria para* $\int \frac{dy}{3y^2}$. *"*

Tal evidência nos faz constatar que "saber o que a regra prescreve significa saber o que é uma aplicação correta da regra" (SEGATTO, 2010 p.140).

E fazer sentido das regras e suas palicações é apenas uma das maneiras de reabilitar a matemática é para analisar seus erros com eles (para entender o que aprenderam) e deixá-los a descobrir o significado de que eles escrevem de acordo com BARUK (1985).

Como ocorreu confusão na utilização das duas regras, os alunos foram convidados a utilizar a operação inversa (diferenciação) para confirmar e esclarecer as regras. Foi quando a própria **Aluna E** percebeu que quando diferenciava a função $\ln(3y^2)$, ela não obtinha a função $\frac{1}{3y^2}$, mas sim outra função $\frac{2}{y}$, permitindo que a turma compreendesse que $\int \frac{dy}{3y^2} \neq \ln(3y^2)$, pois $\frac{1}{3y^2} \neq \frac{2}{y}$.

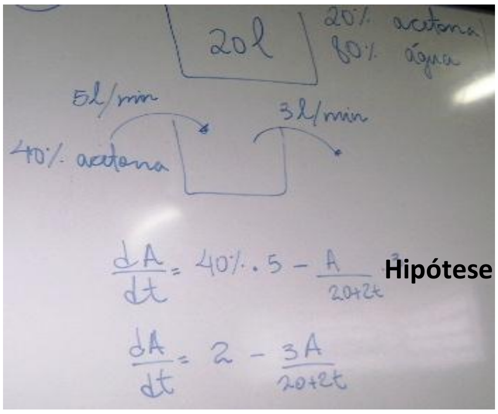
Assim, consegui que os alunos utilizassem o recurso do quadro na construção dos modelos matemáticos, o que permitiu maior diálogo entre os eles, enriquecendo e fortalecendo as discussões matemáticas entre os mesmos, fazendo uso de uma linguagem acessível a eles, pois *"a gente acaba se entendendo, pois a nossa linguagem é diferente"* (informação verbal)..

O quadro branco, neste caso, assumiu o papel de aglutinador dessa linguagem defendida pelos alunos, pois percebi que a linguagem aproximou a forma como eles pensam com a linguagem matemática. Tal fato reforça que para que os alunos entendam o que aprendem é deixá-los descobrir o significado do que eles escrevem e analisar seus próprios erros, segundo Baruk (1985).

Outro exemplo que merece atenção, consta da identificação de uma situação que envolvia a mistura de água e acetona, registrado pelo **aluno T** da seguinte forma:

No registro 1, o aluno considerou uma situação em que: havia em um tanque 20 litros de solução (20% acetona e 80% água), onde entrava 40% de acetona numa razão de 5 l/min (mexendo-se constantemente para tornar a solução homogênea) e saía solução numa razão de 3l/min.

Registro 1 – Registro, do Aluno T, sobre a hipótese do problema de mistura de água e acetona.



Fonte: Aluno T (2008)

Ao iniciar o diálogo com a turma, o aluno em questão disse que: "A essência dos problemas com misturas é concentração do que entra e do que sai", ou seja, "a variação da acetona com o tempo passado é uma diferença entre o que entra de acetona no recipiente e o que sai".

Ao construir a hipótese da situação, o aluno foi questionado pelos outros alunos sobre o porquê da saída corresponder a $\frac{A}{20+2t}.3$, e o **aluno T** respondeu com a ajuda do **Aluno B**:

"_Se entra 40% de acetona de uma quantidade de solução de 5 litros, então temos entrando 40%x5, ou seja, entra 2 litros de acetona por minuto."

"Como não sabemos o percentual de saída, mas conhecemos quanto já temos no tanque, então escrevemos $\begin{gathered} A = 20l + (5-3).t \\ A = 20 + 2t \end{gathered}$".

$t = 0 \rightarrow$ temos 20 litros de solução

$t = 1\text{min} \rightarrow 20$ (entra 5litros de solução e sai 3)

$t = 2\text{min} \rightarrow 20$ (entra 10 litros de solução e sai 6)

$t = 3\text{min} \rightarrow$ (entra 15 litros de solução e sai 9)

Nessa linha de raciocínio, temos:

$t = 0 \rightarrow 20 + 0 - 0$

$t = 1 \rightarrow 20 + 5 - 3$

$t = 2 \rightarrow 20 + 10 - 6$

$t = 3 \rightarrow 20 + 15 - 9$

Então:

$t = 0 \rightarrow 20 + 0 \rightarrow 20 + 2x$ **0**

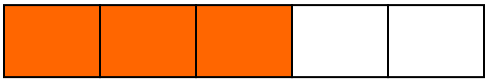
$t = 1 \rightarrow 20 + 2 \rightarrow 20 + 2x$ **1**

$t = 2 \rightarrow 20 + 4 \rightarrow 20 + 2x$ **2**

$t = 3 \rightarrow 20 + 6 \rightarrow 20 + 2x$ **3**

$t = t \rightarrow$ $20 + 2x$ **t**

O **Aluno B** completou dizendo que na verdade estava implícito aí o conceito de fração, desenhando para exemplificar:



E disse: “Nesse caso, temos 3 quantidades para um total de 5, ou $\frac{3}{5}$, ou seja, a parte pintada corresponde a 60% de 5 quantidades. É só lembrar de fração que a gente entende a hipótese”, completando que como o total é 20 + 2t, vai existir uma quantidade A que depende do tempo adotado, logo, temos uma quantidade A do total de (20 + 2t), ou seja, $\frac{A}{20+2t}$, que representa o percentual. Nesse caso, é só multiplicar por 3l/min (que é a vazão de saída).”

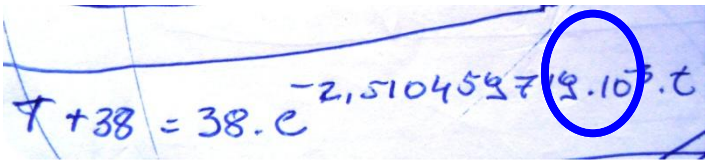
Fica claro no trecho apresentado pelo **Aluno B**, que conceitos não compreendidos nas séries iniciais podem interferir na construção de uma hipótese matemática, por mais simples que ele seja considerado, podendo ser caracterizado como um obstáculo didático[3].

> É preciso então entender o que o aluno não entende. Este entendimento se reconhece via linguagem, através da própria linguagem da matemática, bem como pela compreensão e interpretação desta linguagem pelo aluno. (SILVEIRA, 2008, p.102)

Apesar de a autora entender que esse processo é papel do professor intermediá-lo, além deste os alunos fazendo uso de linguagem própria podem também mediar o processo por interação entre os saberes dos mesmos e as compreensões acerca da linguagem matemática. Além disso, tal fato reflete a responsabilidade matemática dividida entre professor e alunos.

O uso de calculadoras científicas em cursos de Cálculo é necessário para validação ou aceleração do processo, no entanto esta pode desencadear erros matemáticos, por exemplo, do uso de casas decimais, alguns alunos utilizam incorretamente o número decimal por não saber fazer a leitura correta na calculadora. É o caso do modelo do Resfriamento de Newton apresentado pelo **Aluno N**:

Registro 2 – Registro do Aluno N em relação ao erro de notação científica.



Fonte: Aluno N (2008)

Para a notação científica $-2{,}510459719.10^{-3}$ que aparecia no visor da calculadora, alguns alunos adotavam apenas $-2{,}510459719$, ignorando a potência negativa (-3). Como os alunos tinham diferentes calculadoras, foi sugerido que todos efetuassem o procedimento para verificar se alguma calculadora apresentava um resultado diferente. A partir daí, ocorreu o conflito. Aluno N: "Como que as calculadoras podem apresentar resultados diferentes?"

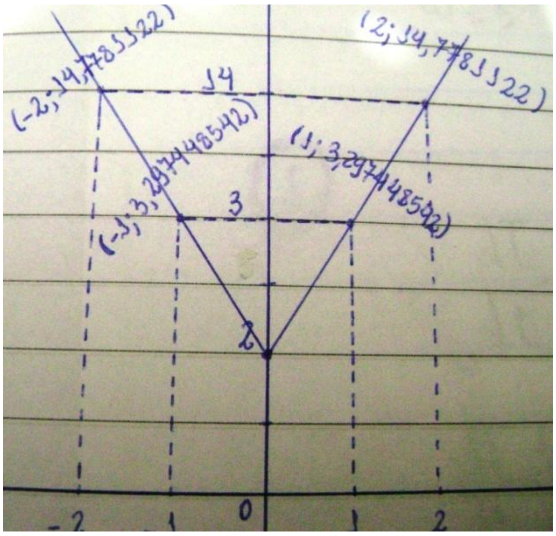
Foi sugerido aos alunos que revisitassem as propriedades de potência e então o erro foi percebido de imediato $\left(-\dfrac{2{,}510459719}{10^3} = -0{,}002510459719\right)$, e verificado que a potência que os alunos estavam ignorando invalidava o modelo.

Erros recorrentes e processos de Modelagem Matemática, dizem respeito a construção gráfica incorreta dos modelos, comprometendo a análise do modelo. É o caso do modelo

[3] Erros matemáticos que atingem uma quantidade significativa de alunos geram obstáculos didáticos.

$y = 2.e^{\frac{x^2}{2}}$, sobre declividade, que em um dos casos mais inadequados foi representado assim, registro 3:

Registro 3 – Registro gráfico da Aluna AG para o modelo $y = 2.e^{\frac{x^2}{2}}$



Fonte: Aluna AG (2008)

Nesse caso específico parece que a aluna não se dá conta de que se trata de uma função exponencial. Parecer evidente nesse contexto a aplicação da regra onde se faz a substituição de valores aleatórios para x, mas, no entanto como a primeira noção de função que os alunos aprendem no ensino básico é a linear, acaba que sem perceber os mesmos "ligam" os pontos encontrados linearmente. Tal fato aponta que "conhecer o conteúdo "funções" não é saber citar a definição quantas vezes repetida em livros de matemática" (CURY, 2007, p.73), mas "conhecer um função é ter a ideia de como as variáveis se comportam quando são "governadas" por uma determinada lei" (p.73)

Assim, quando o aluno tem a noção do comportamento da função, este consegue antever o que acontece com alguns pontos. Quando isto não acontece, uma possibilidade é analisar o gráfico plotado por um software, neste caso específico o Modellus[4], por permitir a simulação de modelos matemáticos.

A própria utilização do Modellus pressupõe Modelagem, uma vez que permite aos alunos e professores realizarem experiências com modelos matemáticos. Assim a aluna supracitada, com o uso do software Modellus, percebeu divergências de representação, gerando um estado de reflexão, pois *é mais fácil analisar a construção de um conceito pelo*

[4] Tutorial: Jean Piton e Kleber Gomes, LAPEMMEC-Laboratório de Pesquisa em Educação Matemática Mediada Por Computador/UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas

aluno, quando ele faz uma falta ou comete um erro, porque aparecem as diferentes interpretações que ele faz de um objeto.(SILVEIRA, 2006, p.8)

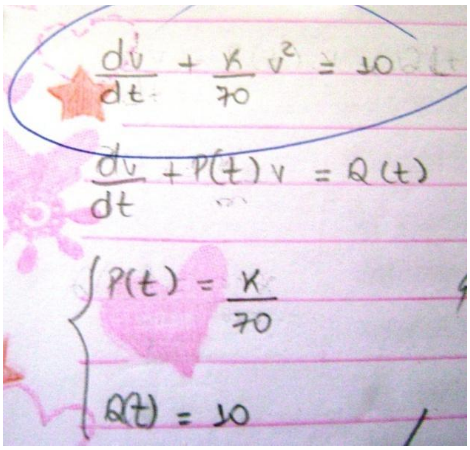
Ou seja, quando o aluno apresenta um resultado correto, não significa necessariamente que ele compreenda a regra matemática e ao cometer erros, gera-se a oportunidade de reflexão dos conceitos matemáticos envolvidos.

Tais evidências foram facilitadas pelo uso da Modelagem Matemática proporciona muita reflexão ao longo do processo, que diferentemente de se trabalhar tradicionalmente, onde o estudo do Cálculo valoriza repetidos exercícios semelhantes, o que gera respostas mecânicas de procedimentos e fórmulas sem a preocupação com o conceito das "coisas".

Um exemplo peculiar da extensão de repetição de regras reforçam erros matemáticos por negligência, como ocorridos no fato que segue. Cinco problemas foram apresentados aos alunos e estes orientados a modelar três por livre escolha, um usando a idéia de variáveis separáveis e o mesmo problema pela técnica de EDO's linear. O objetivo era verificar se os alunos percebiam a possibilidade de duas técnicas para um mesmo problema e diagnosticar se os conceitos de EDO estavam compreendidos.

Somente dois alunos perceberam que poderiam usar a técnica de variáveis separáveis e EDO linear para quatro dos cinco problemas. Apenas um dos problemas não se tratava de uma EDO linear. Este fato não foi percebido por nenhum aluno, onde a grandeza velocidade estava elevada ao quadrado (V^2), descaracterizando a equação como sendo linear, caracterizando neste caso um obstáculo didático, onde 100% dos alunos não conseguiram resolver o problema, registro 4.

Registro 4: Erro cometido ao aplicar a técnica de EDO's linear para uma equação não linear.



Fonte: Pesquisa de campo, 2008

O registro 4, mostra um problema que foi equacionado corretamente por todos os alunos, mas que, no entanto todos os alunos não identificaram a equação como sendo não linear. Este erro cometido pelos alunos foi identificado por eles posteriormente como sendo uma “gafe”, alegando que estavam tão impregnados com EDO’s linear que não se deram conta da ordem. Neste caso,

> O erro do aluno nos possibilita perceber de forma mais clara as modificações de um conceito. Mas não é todo erro que mostra a construção de um novo conceito. Ainda que o erro analisado seja reconhecido pelo aluno, esse erro pode ser uma negligência ou um lapso. Se o aluno não reconhece o erro como erro, ele tem a ilusão de que está certo. A compreensão que o aluno faz do conceito dado pelo professor pode ser um outro conceito surgido da sua interpretação. (SILVEIRA, 2006, p.15)

Tornar os erros observáveis selecionando e distinguindo-os é tarefa tanto do professor quanto dos próprios alunos estimulados pelos professores, na medida em que reconhecemos que o erro também é uma forma de conhecimento, pois por meio dele podemos conhecer o certo, pois muitos dos erros cometidos por alunos de Matemática são devidos a linguagem utilizada pelo professor, a compreensão das sentenças matemáticas pelos alunos, as relações estabelecidas com ou pela matemática, a linguagem matemática em si, e outros.

> O estudo do erro não se limita apenas a identificá-lo através da comparação das respostas dadas como padrão esperado, mas buscar as possíveis causas; considerando para isso, os conhecimentos que cada erro manifesta e a ‘distorção’ em relação ao conhecimento esperado (MIRANDA, 2006, p. 26).

Nesta perspectiva de erro proposta pelo autor, o tratamento do erro se encaixa ao processo de Modelagem Matemática no ensino, pois a Modelagem Matemática pressupõe investigação, e investigar pressupõe reflexão sobre o que se investiga. Ao refletir em Modelagem Matemática, consequentemente o erro também será refletido, pois “saber o que é certo é saber o que é errado” (MIRANDA, 2006, p. 23), ou seja, oportunizar aos educandos a aquisição de conhecimentos, passando pela superação de erros cometidos no processo de Modelagem Matemática, fazendo uso de linguagem adequada.

Ainda neste processo de construção/reconstrução de conhecimento é evidente a tomada de consciência de responsabilidade na busca de compreensão dos conceitos matemáticos.

3 Referência

BARUK, Stella. **Des exigences de l’entendiment dans sés relations avec le sens**. Editions Du Seuil, 1985.

BARUK, Stella. **Insucessos e Matemáticas**. Lisboa/Portugal: Relógio D' Água Editores, 1996.

BITTENCOURT, Jane. **Obstáculos Epistemológicos e a pesquisa em Didática da Matemática**. Revista Educação Matemática, N.º 6, ano 5, maio de 1998.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

EVES, Howard. **Introdução a história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: UNICAMP, 2004.

FERRUZZI, Elaine Cristina. **A modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem do cálculo diferencial e integral nos cursos superiores de tecnolog***ia*. 2003. 156f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas). Universidade Federal de Santa Catarina Florianópolis, 2003.

MEYER, João Frederico da Costa de A.; CALDEIRA, Ademir Donizeti e MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

PINTO, Neuza Bertoni. **O erro como estratégia didática***:* estudo do erro no ensino da matemática elementar. Campinas: Papirus, 2000.

SEGATTO, Antônio Ianni. **Sobre regras e acordos**. In: MORENO, Arley R. (org). **Wittgenstein:** Certeza? Campinas. UNICAMP, Centro de lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2012.(p. 134-163)

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. O contexto em matemática e seus conceitos. In: **Educação Matemática em revista**. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Ano 13 – nº 20/21, dezembro de 2006.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da Silveira. Movimento Para a Ação de um Novo Conceito Matemático. In: **Revista da Educação**, Vol. XVI, nº 2, 2008, p.101 – 121.