MATEMÁTICA: A BUSCA POR SEUS FUNDAMENTOS E O SURGIMENTO DA TEORIA DOS CONJUNTOS

Wesley Ferreira Nery [1]

Rosemeire de Fátima Batistela[2]

Resumo: Desde os primórdios os matemáticos se inquietam pensando em como garantir a veracidade das teorias matemáticas. Um exemplo disso são as discussões sobre o conceito de infinito, que é historicamente um conceito imbricado. Ao fim do século XIX para o início do século XX a busca por fundamentos se intensificou com o surgimento de paradoxos no seio da teoria dos conjuntos. Nesse momento três correntes de pensamento que se baseavam na Filosofia tentaram oferecer fundamentos sólidos e definitivos a matemática: o intuicionismo, o formalismo e o logicismo. Neste ínterim, Cantor propõe a teoria dos conjuntos que foi e é para a matemática de grande utilidade para seu desenvolvimento. Nesta oportunidade objetivamos apresentar reflexões sobre a busca de fundamentos para a matemática na transição para o século passado e explicitar o espaço e a importância da teoria dos conjuntos na estrutura dessa ciência.

Palavras Chaves: fundamentos da matemática. correntes filosóficas da matemática. teoria dos conjuntos.

Introdução

O século XIX foi um momento de grandes avanços nos mais variados ramos do conhecimento, inclusive nas matemáticas (dizemos matemáticas porque há este tempo ainda não se concebia matemática como um campo unificado de conhecimento). Um exemplo desse fato foi o surgimento das geometrias não euclidianas no final deste século. Nesse momento surgem os estudos de Cantor em torno da teoria dos conjuntos, oferecendo um tratamento matemático do infinito, não concebendo apenas a concepção de um infinito potencial – aquele que é inatingível, como o infinito do conjunto dos números naturais – estabelecendo definitivamente um infinito atual – aquele que está plenamente realizado, como no conjunto de pontos que constituem um segmento de reta - estudo este que será marcado posteriormente

[1] Graduando do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Feira de Santana/BA. wesleyferreiranery@yahoo.com.br

[2] Professora da área da Educação Matemática do Departamento de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Feira de Santana/BA. rosebatistela@hotmail.com

por paradoxos relacionados ao uso de raciocínios válidos no domínio finito para o domínio do infinito e, sobretudo, "têm o infinito atual como pressuposto. O Paradoxo de Russel [...] pressupõe o conjunto de todos os conjuntos." (VILELA; MONTEIRO, 2013, p. 6).

Desde a idade clássica faz-se presente entre os matemáticos uma intensa discussão acerca dos fundamentos da matemática, que se intensificou no final do século XIX. Sendo um dos principais aspectos desta problemática a noção de infinito, que é vista historicamente como um obstáculo, conforme Amadei:

> Desde suas origens, a matemática se confronta com o infinito como um problema crucial. A crise dos irracionais, os paradoxos de Zenão, o método de exaustão de Eudóxio [sic], o axioma de Arquimedes testemunham isso. Os gregos se depararam com a dificuldade de não poderem exprimir racionalmente (por meio da razão entre dois números inteiros positivos) a medida do comprimento de uma linha contínua em um sistema discreto de números (AMADEI, 2005, p. 44).

À época, destacaram-se três correntes de pensamento, o logicismo, o intuicionismo e o formalismo.

Esta busca para assegurar as verdades matemáticas além de refletir sobre em que base deveria estar postas as teorias desse ramo do conhecimento, ajudam a estruturar as matemáticas como a ciência matemática que conhecemos hoje, como afirma Mondini (2008, p. 395)

> O que justifica a estruturação da matemática como Ciência? A necessidade de respostas para essa pergunta deu início à sistematização do conhecimento que hoje chamamos de matemática. A busca de fundamentos para estruturar a matemática com o rigor de uma ciência iniciou-se com os gregos, mais especificamente com Platão.

Na passagem do século XIX para o XX, três correntes do pensamento matemático que tinham suas bases na filosofia: logicismo, intuicionismo e formalismo tentaram oferecer fundamentos sólidos e definitivos à matemática, contudo, essas tentativas foram frustradas, como ratifica Snapper:

> As três escolas mencionadas no título tentaram, todas elas, fornecer fundamentos sólidos a matemática. As três crises são o fracasso dessas escolas em completar seus objetivos. [...] e neste artigo desejo enfatizar os aspectos do logicismo, intuicionismo e formalismo que mostram claramente que essas escolas se baseavam na filosofia (SNAPPER, 1984, p. 85).

Neste texto trazemos o solo histórico dos acontecimentos ao final do século XIX os quais foram pano de fundo para o surgimento da teoria dos conjuntos. Assim, apresentaremos as correntes filosóficas que tentavam fundamentar a matemática - mostrando as diferentes concepções do que vem a ser a matemática e seus empreendimentos na tentativa de livrá-la de contradições - e chegaremos ao surgimento da teoria dos conjuntos proposta por Cantor que tem um papel de extrema relevância na fundamentação da matemática com o seu tratamento rigoroso do infinito. E a posterior descoberta de antinomias nessa teoria causando grande descontentamento entre os matemáticos, os quais sabiam que a teoria dos conjuntos havia se tornado indispensável à sua ciência.

As correntes filosóficas que buscavam fundamentar a matemática

A primeira dessas correntes de pensamento foi o logicismo, esta foi iniciada por volta de 1884 e tem como principais representantes Gottlob Frege e Bertrand Russel. Estes tinham por objetivo fundamentar a matemática mostrando que ela fazia parte da lógica, se aproximando da perspectiva da filosofia realista[3], baseada no platonismo aceitando que os entes matemáticos existem independentemente da mente humana. O platonismo concebia os entes matemáticos como elementos de um mundo ideal, um mundo não humano, só existindo no "nosso mundo" representações grosseiras desses entes. Para estes, os entes já estavam prontos e a função dos matemáticos era apenas descobri-los.

Simultaneamente ao logicismo, a corrente intuicionista, por volta dos anos 1908, despontava na pessoa do matemático holandês L. E. J. Brouwer, com o objetivo de oferecer novos alicerces à matemática, fazendo a sua construção a partir dos números naturais. Para os intuicionistas só seria ente matemático o que pudesse ser construído pela mente humana, comungando com a filosofia conceptualista[4]. Para Mondini (2008, p. 397) "o intuicionismo foi uma das principais correntes do movimento construcionista[5]. Os construcionistas acreditavam que todo e qualquer conhecimento deveria ser construído a partir da intuição".

A terceira corrente que se manifestou foi o formalismo, por volta de 1910, com o matemático alemão David Hilbert. O propósito dos formalistas era trazer para as teorias matemáticas um conjunto de regras bastante definidas e explícitas acompanhado de uma simbologia, e criar mecanismos para operar, os algoritmos. Este grupo seguia a concepção nominalista[6] e entendia que os entes matemáticos são como sons ou linhas escritas sem nenhuma existência fora ou dentro da mente humana.

De acordo com Snapper (1984) para os logicistas empreenderem seu objetivo de reduzir a matemática a lógica, eles mostraram que a matemática clássica conhecida até o momento poderia ser deduzida da teoria dos conjuntos. Daí bastava representar os axiomas dessa teoria em uma linguagem de primeira ordem para que eles pertencessem à lógica, ou seja, que fosse

[3] Para a doutrina realista o importante era a idéia do objeto e não a existência do objeto concreto.
[4] Para a doutrina conceptualista os objetos só existem mediante sua construção mental.
[5] A doutrina construcionista entendia que todo conhecimento deveria ser construído a partir da intuição.
[6] Para a doutrina nominalista os entes matemáticos são apenas nomes ou sons sem nenhuma existência real ou imaginária.

uma proposição lógica. O que segundo Snapper (1984), os logicistas entendiam por proposição que tem uma generalidade completa e é verdadeira em função da sua forma e não do seu conteúdo. Não conseguindo os logicistas empreender seu objetivo de mostrar que a matemática faz parte da lógica.

Snapper (1984) afirma que a corrente logicista fracassou em mais ou menos vinte por cento, pois pelo menos dois dos nove axiomas da teoria dos conjuntos (axioma da infinidade e axioma da escolha) não podem ser considerados proposições lógicas. De acordo com Snapper, os logicistas

> Tinham um conceito geral de quando uma proposição pertence à lógica, ou seja, quando uma proposição deveria ser considerada uma "proposição lógica". Diziam: Uma proposição lógica é uma proposição que tem generalidade completa e é verdadeira em virtude de sua forma, e não do se conteúdo. Aqui, a palavra "proposição" é usada como sinônimo de "teorema" (SNAPPER, 1984, p.86).

Apesar do insucesso os logicistas deram grandes contribuições para o desenvolvimento da lógica matemática atual.

Ainda de acordo com Snapper (1984) a corrente logicista com seu objetivo de reduzir a matemática à lógica não entendia as contradições que apareceram na matemática como um problema desse ramo do conhecimento e sim dos matemáticos que a produziam. O que é uma das principais diferenças entre essa corrente e a dos intuicionistas. Os quais entendiam que esses problemas eram da própria matemática.

E outro ponto crucial que diferencia essas correntes (logicismo e intuicionismo) é a concepção de ente matemático. Para o logicismo os entes existiam independentes da mente humana, o que implicava em aceitar entes que não podiam ser construídos pela mente do homem, uma vez que os intuicionistas só aceitavam como entes matemáticos o que podesse ser construído pela mente humana com um número finito de procedimentos.

Já os intuicionistas mais do que livrar a matemática de contradições queriam reconstruir a matemática a partir dos números naturais, que segundo eles é intrínseco ao ser humano. Pois como já foi explicitado acima, para a corrente intuicionista os paradoxos eram da própria matemática e não erros dos matemáticos. Assim só seria considerado como matemática aquilo que pudesse ser construído em um número finito de processos mentais. Contudo, uma vez construído intuitivamente o ente, essa construção é indutiva e efetiva como afirma Snapper:

> É igualmente importante observar que esta construção é ao mesmo tempo "indutiva" e "efetiva". Indutiva no sentido de que, se desejarmos construir, digamos, o número 3, devemos percorrer todos os passos mentais de construir primeiro 1, em seguida 2, e finalmente 3; não podemos simplesmente tirar o número 3 da cartola. É efetiva no sentido de que, uma vez completada a construção de um número natural, ele foi construído integralmente (SNAPPER, 1984, p. 88).

Nessa perspectiva ofereceram fundamentos satisfatórios à matemática. Mas o intuicionismo foi rejeitado universalmente pelos matemáticos clássicos. Uma vez que colocavam em xeque vários resultados que eram verdadeiros para os matemáticos clássicos e falsos para os intuicionistas, por exemplo, o princípio do terceiro excluído era tido por eles como uma combinação de palavras sem sentido. Com essa construção, o tamanho das demonstrações intuicionistas era grande o suficiente para depor contra as demonstrações da matemática clássica. A menos do tamanho das demonstrações, de alguns resultados e de algumas partes que não podiam, no âmbito dessa corrente, ser construídas intuitivamente, não há justificativas científicas para a rejeição do intuicionismo. Sendo essas justificativas de cunho emocional e filosófico, advindo do que vem a ser a matemática para os matemáticos clássicos como afirma Snapper

> Essas três razões para a rejeição do intuicionismo pelos matemáticos clássicos não são nem racionais nem científicas. Também não são razões pragmáticas, baseadas na convicção de que a matemática clássica é melhor para aplicações á física ou a outras ciências do que o intuicionismo. São todas razões de natureza emotiva, baseadas em um sentimento profundo do que seja realmente a matemática (SNAPPER, 1984, p. 89-90).

Os formalistas, diferentemente dos logicistas e dos intuicionistas, entendiam os entes matemáticos como sons ou simples nomes, sem nenhuma existência fora ou dentro da mente humana, o que corrobora parra o seu objetivo de formalizar as teorias matemáticas, no sentido de dar um tratamento a essas teorias estritamente sintético, com regras explícitas e uso de símbolos para representar os entes matemáticos.

Agora resta-nos pensar o que é necessário para formalização de uma teoria. Para isso vamos partir do pensamento de Snapper (1984, p. 91)

> "O que formalizamos afinal ao formalizar alguma coisa?" A resposta é que formalizamos uma teoria *axiomatizada* dada. Deveríamos ter cuidado para não confundir axiomatização com formalização.

Como nos alerta Snapper a formalização não é o mesmo que axiomatização e, para deixar claro essa diferença vamos falar brevemente sobre o que vem a ser a axiomatização. O que é axiomatização? A axiomatização de um ramo do conhecimento matemático, mas não somente destes, é iniciado pelo processo de escolha de entes primitivos (noções comuns), os quais podem ser caracterizados como: não definidos e servem de base para os axiomas, definições e os teoremas. Esses entes surgem de um censo coletivo e são necessários para evitar um círculo vicioso, caso quiséssemos definir tudo em uma determinada teoria. Um exemplo clássico de teoria axiomatizada é a geometria euclidiana plana, tendo como entes primitivos: o ponto, reta e o plano.

Depois dos entes primitivos é escolhido um número pequeno de axiomas, sendo estes proposições relacionadas aos entes primitivos e que são aceitos como verdadeiros pelos matemáticos, sem que seja necessária a sua demonstração. Recorrendo novamente a Geometria, um exemplo, de axioma é “por um ponto passam infinitas retas”.

A partir daí utilizando regras de inferência relacionamos as definições e os axiomas (que se utilizam das noções comuns) para deduzir os teoremas. Sendo estes proposições que precisão ser demonstradas para serem aceitas como verdadeiras.

Agora, com uma teoria axiomatizada basta escolher uma linguagem da lógica de primeira ordem para essa teoria, e a formalização estará completamente realizada. A escolha dessa linguagem é composta de cinco itens: uma quantidade enumerável de variáveis, símbolos para os conectivos da linguagem comum, o sinal de igualdade, os quantificadores e símbolos para os entes primitivos da teoria axiomatizada.

O formalismo ao formalizar as teorias matemáticas tem o objetivo princípio de livrar a matemática de contradições como afirma Mondini (2008, p. 398)

> O objetivo principal do formalismo é provar que as ideias matemáticas são isentas de contradições. Caso os formalistas alcançassem seu objetivo, a matemática se tornaria livre de paradoxos e contradições e, quando ela pudesse ser reescrita com demonstrações rigorosas em um sistema formal, se estabeleceria como verdade.

Assim, para empreender seu objetivo os formalistas deveriam mostrar que uma teoria formalizada é livre de paradoxos, ou seja, dentro dessa teoria não é possível provar uma sentença verdadeira e falsa. Se assim o fizessem, provariam que as teorias matemáticas são completas e consistentes dentro da sua própria axiomática. O que cai por terra em 1930, com a demonstração do teorema de Gödel, como explicita Mondini (2008, p. 399)

> Em 1930, Gödel provou a impossibilidade de demonstrar a compatibilidade dos axiomas da Aritmética dentro de um sistema que inclua a Aritmética. Com isso, provou também que o projeto de Hilbert não poderia ser bem sucedido, “por que não é possível provar a consistência da matemática dentro da própria matemática”.

O surgimento da teoria dos conjuntos

Um dos temas mais imbricados para os que lidam com a matemática, e não somente para estes, desde os primórdios é a noção de infinito. Surgindo assim várias controvérsias ao longo da história. Uma dessas é a concepção de infinito potencial e de infinito atual. O infinito potencial é o infinito inatingível; por exemplo, considerando o conjunto dos números naturais não existe o maior número natural, uma vez que dado qualquer numero natural podemos obter um maior pelo ato de acrescer um a este número. Já o infinito atual é um infinito que está plenamente realizado.

O infinito potencial era aceito em detrimento do infinito atual até o século XIX pela maioria dos matemáticos. Neste século com sua aventura pelos domínios do infinito George Cantor estabeleceu indubitavelmente o conceito de infinito atual, com a criação de sua teoria dos conjuntos transfinitos. Assim Cantor foi um dos poucos matemáticos a dar um tratamento rigoroso que possibilitasse o estudo do infinito, tornando-se a teoria dos conjuntos o alicerce para o edifício dos conhecimentos matemáticas.

George Cantor nasceu dia três de março de 1845 em São Petersburgo na Rússia, onde começou a escola primária e logo depois se mudou para Alemanha com sua família, lugar em que continuou seus estudos e despertou os primeiros interesses pela matemática. Ele foi um matemático diferenciado por tentar incansavelmente possibilitar a articulação entre os matemáticos de sua época. Uma prova desse fato foi sua dedicação para a realização de congressos internacionais de matemática, sendo o primeiro da história em 1897, em Zurique.

Os estudos de Cantor sobre matemática começaram em Zurique e depois ele foi para Berlin. Em Berlin desenvolveu a princípio estudos sobre teoria dos números. Depois de receber sua titulação de doutor começou a lecionar na cidade alemã de Halle, onde direcionou sua pesquisa para área da análise. No fim da vida este matemático teve sérios problemas mentais, que por diversas vezes o afastavam de suas atividades acadêmicas, morrendo de um ataque cardíaco em seis de janeiro de 1918.

Cantor deixou para sempre sua marca na matemática com a criação de sua teoria dos conjuntos, teoria essa que possibilitou o desenvolvimento do conhecimento matemático da sua época.

Com a sua teoria, Cantor mostrou a existência de infinitos diferentes chocando toda a comunidade matemática, que professava justamente o contrário. Através de seus estudos para descobrir se um dado conjunto infinito é enumerável, ou seja, se é possível estabelecer uma correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais, o pai da teoria dos conjuntos mostrou que o conjunto dos números inteiro e o conjunto dos números reais têm potencias diferentes. Cantor considerou um subconjunto próprio dos números reais, o intervalo [0,1], e mostrou que esse subconjunto não é enumerável, assim, o dos números reais também não o é; diferente do conjunto dos números inteiros que é enumerável. Com esse fato justifica que existem pelo menos dois infinitos diferentes como explicita Freiria (1992, p. 72) “Com esta descoberta, Cantor estabeleceu um fato surpreendente, qual seja, o de que existem pelo menos dois tipos diferentes de infinito: o dos conjuntos dos números inteiros e o conjunto dos números reais”.

O século XIX foi marcado por uma grande preocupação com questões relacionadas aos fundamentos da matemática e com a veracidade das teorias matemáticas. Nesse contexto surge a teoria dos conjuntos, que ganhou credibilidade com o seu tratamento matemático do infinito, e passa a servir de fundamentos para a matemática e contribui para o desenvolvimento de novos ramos dessa ciência, como afirma Freiria (1992, p.72)

> A partir de 1870, quando Cantor iniciava sua vida profissional, as atividades de pesquisa na área de axiomatização e fundamentos (estruturalismo) intensificavam-se rapidamente. E a sua teoria dos conjuntos, que então se desenvolvia, revelou-se muito adequada para ser o fundamento de toda a matemática. Além disso, com o surgimento de novas disciplinas matemáticas, com a Topologia, a Álgebra Abstrata, a teoria da Medida e Integração, a teoria da Probabilidade, a Análise Funcional, entrelaçadas e de fronteiras indistinguíveis, onde a linguagem, a notação e os resultados da teoria dos conjuntos se revelaram instrumento natural de trabalho, a ponto de ser impossível conceber o desenvolvimento de toda essa matemática sem a "teoria dos conjuntos de Cantor".

Nesse momento de extremo sucesso para a teoria de Cantor vem à tona em seu seio vários paradoxos, como o paradoxo de Russel do conjunto de todos os conjuntos que não contém a si próprio. Mas a essa época a teoria dos conjuntos já era imprescindível para a matemática. Assim para livrar essa teoria de contradições, consequentimente a matemática a quem servia como fundamentos, os matemáticos contemporâneos a Cantor apostaram na axiomatização da teoria dos conjuntos. Assim, "Estas dificuldades foram evitadas no interior da matemática por meio de formalizações. As formalizações implicaram também, no caso de Cantor, em abandonar as noções tais como "faculdade ativa do pensamento", "abstração", "natureza" e "intuição"" (VILELA; MONTEIRO, 2013, p. 6).

Considerações finais

A transição do século XIX para o século passado foi o ápice da busca por fundamentos para a matemática, fundamentos estes que teriam a missão de livrá-la de contradições. Isso fica explícito com os esforços das correntes - logicista, intuicionista e formalista - que tentaram fundamentar a matemática a partir de suas concepções do que vem a ser essa ciência. E apesar da matemática técnica atual sobreviver muito bem sem essas especulações filosóficas, elas são interessantes aos que desejam refletir sobre o que é a matemática e os seus objetos.

A teoria dos conjuntos de Cantor emerge no momento dessa incansável busca por fundamentos e, se estabelece com o seu tratamento matemático do infinito como o alicerce para a matemática. Com a fundamentação dessa ciência e dando suporte ao desenvolvimento dos novos ramos da matemática. Contudo, essa teoria é marcada posteriormente pela descoberta de antinomias em seu bojo, o que é remediado pela sua axiomatização. Assim a teoria cantoriana foi e é de extrema importância para a matemática e o seu desenvolvimento.

Uma vez que traz luz ao conceito matemático de infinito, que durante toda a história da humanidade foi tido como paradoxal.

Referências

AMADEI, F. L. O Infinito um obstáculo no ensino da matemática. 2005. 111 f. Dissertação (Mestrado em Educação matemática) – Potifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

FREIRIA, A. C. **A teoria dos conjuntos de Cantor. Paidéia**, Ribeirão Preto, n. 2, p.70-77, 1992.

MONDINI, F. O Logicismo, o Formalismo e o Intuicionismo e seus Diferentes Modos de Pensar a Matemática. In: BAUMANN, A. P. P.; MIARKA, R.; MONDINI, F.; LAMMOGLIA, B.; BORBA; M. C. (Orgs.). **Maria em *Forma/Ação***. Rio Claro: Editora IGCE, 2010. p. 394 - 401. 1 CD.

SNAPPER, E. **As Três Crises da matemática: o Logicismo, o Intuicionismo, e o Formalismo.** Humanidades, p.85-93, 1884.

VILELA, D. S.; MONTEIRO, A. Paradoxos do infinito e Teoria de Cantor: Desdobramentos para a Filosofia da Educação Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. Anais... : **Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectiva.** SBEM/BRUC, 2013. p. 1-9.