# UMA ANÁLISE SOBRE A IMPOSSIBILIDADE DA TRISSECÇÃO DO ÂNGULO

Everaldo Fernandes Barbosa[1]

Filosofia da Educação Matemática

**Resumo**

A trissecção de um ângulo utilizando apenas régua e compasso é um dos três problemas mais famosos da antiguidade. Apenas com a evolução dos conceitos matemáticos, na sua grande maioria, inter-relacionados, esses problemas foram completamente esclarecidos. O objetivo desse trabalho é mostrar, por meio da análise da impossibilidade da trissecção do ângulo, a complementaridade entre aritmética e geometria que originou novos conhecimentos.

**Palavras chave:** Trissecção do Ângulo. Complementaridade. Produção de Conhecimento.

## ANÁLISE DO PROBLEMA DA TRISSECÇÃO DO ÂNGULO POR NÊUSIS

As tentativas de resolver o problema de trissecção do ângulo foram importantes para o desenvolvimento matemático. Com os gregos, surgem várias soluções com apenas régua não graduada e compasso, mas eram construções "moles" denominadas construção de Nêusis – do verbo grego *neuein*, que significa apontar.

Consideremos um ângulo qualquer *ABC*, que pretendemos trissectar. Sejam *AB* e *BC* os lados desse ângulo, como mostra a figura 1 abaixo.

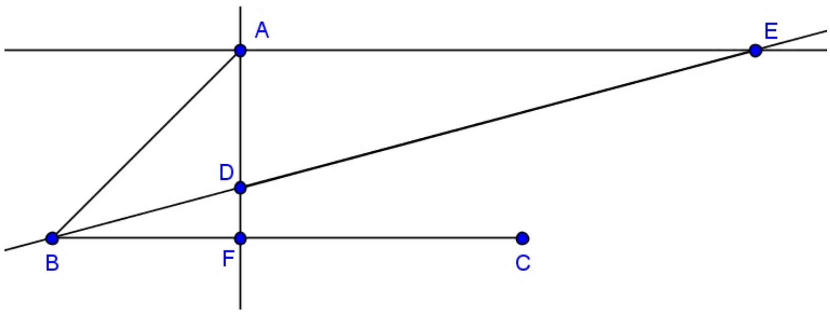


Figura 1: Trissecção do ângulo utilizando-se o método Nêusis.
Fonte: *Software* Geogebra.

Pelo ponto *A* de um dos lados, vamos traçar uma paralela e uma perpendicular ao outro lado. O segmento *DE* é inserido entre estas duas retas de modo que o seu comprimento

[1] Mestre em matemática pela Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP. Aluno de doutorado da Universidade Bandeirante de São Paulo – UNIBAN. E-mail: profever@hotmail.com

seja o dobro do comprimento do segmento *AB* (isso é o que denominamos por construção mole) e, ainda, de tal modo que o ponto *B*, vértice do ângulo a trissectar, esteja no seu prolongamento. Então, o ângulo *DBC* é a terça parte do ângulo *ABC*.

O procedimento que se segue é no intuito de verificar que o ângulo *ABC* é trissectado pela reta *DB* (figura 2). Marcamos *H*, ponto médio do segmento *DE* e, tracemos o segmento de reta *AH*. A reta *DE* intersecta as retas paralelas *AE* e *BC*, formando os ângulos alternos internos *HEA* e *DBC* que são geometricamente iguais. O ângulo *EAD* é reto, então podemos inscrevê-lo em uma semicircunferência cujo diâmetro seja *DE* e centro no ponto *H*. Assim, visto que por construção os segmentos *HE* e *HA* são iguais, o triângulo *AHE* é isósceles e, portanto, os ângulos *EAH* e *HEA* são iguais. *DE* é o dobro do comprimento *BA*, *H* é o ponto médio de *DE* e *A* *ABH* é isósceles, portanto os ângulo

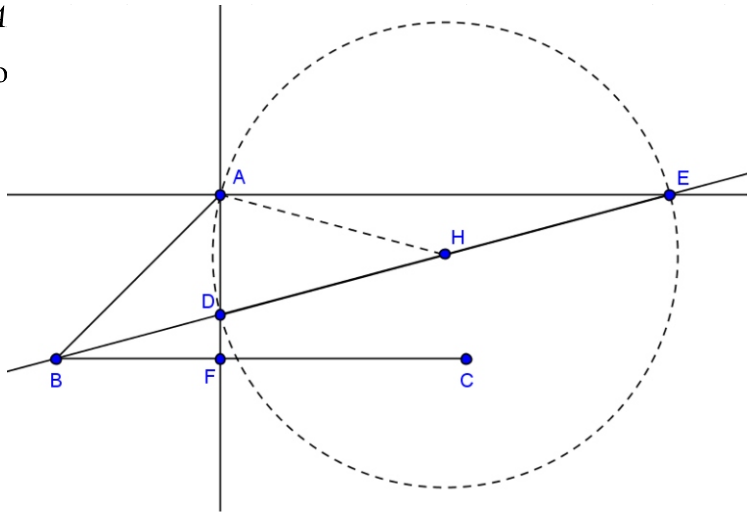


Figura 2: Justificativa geométrica da trissecção do ângulo pelo método de Nêusis.
Fonte: *Software* Geogebra

Como o ângulo *BHA* é um ângulo externo ao triângulo *AHE*, é possível afirmar que o ângulo *BHA* é igual à soma dos ângulos internos opostos, *EAH* e *HEA*. Mas, o ângulo *BHA* é o dobro do ângulo *HEA* (ou do ângulo *EAH*) e como o ângulo *ABD* é igual ao ângulo *BHA* tem-se que o ângulo *DBC* é metade do ângulo *ABD* e, finalmente, que o ângulo *DBC* é a terça parte do ângulo *ABC*.

Pelo que foi exposto acima, o problema da trissecção de um ângulo agudo fica resolvido se soubermos inserir o segmento DE (duplo de *BA*) entre as retas *FA* e *AE* *apontando* para o ponto *B*. Assim, o problema da trissecção do ângulo, foi reduzido a outro, que os geômetras gregos designaram por "*problema de construção por Nêusis*".

As soluções do problema de trissecção do ângulo através de construções mecânicas não agradavam aos gregos. Contudo, uma alternativa diferente dessas veio apenas com Descartes (1596 - 1650). Com ele, começou o que podemos chamar de "*o germe da prova da impossibilidade de trissectar o ângulo com régua não graduada* e *compasso*". Foi a interação entre a aritmética e geometria, ou seja, entre figuras e números, que possibilitou a criação da álgebra de segmentos aliada a teoria de proporcionalidade, oportunizando assim, passar de um problema geométrico ao problema algébrico que, de acordo com Eves (2002, p. 134), "um produto desse pensamento relacional levou a descobertas frutíferas ligadas ao domínio de racionalidade, números algébricos e teoria dos grupos". Nesse sentido dizemos que houve produção de conhecimento. Foi necessário o desenvolvimento de novos métodos e teorias para justificar e resolver problemas como esse da trissecção do ângulo. Não estamos falando que a teoria de grupos surgiu diretamente a partir da trissecção do ângulo, porque antes disso, formalizaram-se outras, como por exemplo, a teoria dos números, mas são problemas como esses que desencadeiam uma série de descobertas inter-relacionadas que permitem produzir novos conhecimentos.

## ANÁLISE DA INTERAÇÃO ENTRE ARITMÉTICA E GEOMETRIA

A interação da aritmética com a geometria deu início com Descartes na tentativa de justificar seu método científico de estabelecer a verdade nas ciências. Descartes buscava um método onde generalizava a verdade para todos os ramos da ciência, evitando uma ciência compartimentalizada. "Todos aqueles que procuraram a verdade nas ciências, só os matemáticos puderam encontrar razões certas e evidentes, [...] aproveitei o melhor da análise geométrica e da álgebra, e assim, corrigi todos os defeitos de uma pela outra" (DESCARTES, 1989, p. 46). "Descartes procurou por um método geral de pensamento capaz de facilitar as descobertas e encontrar a verdade nas ciências" (STRUIK, 1987, p. 96).

Na representação de curvas por Descartes encontramos uma estreita analogia que ele faz entre as operações com linhas retas e operações com números. Em particular, pela suposição de uma linha de unidade escolhida arbitrariamente, ele é capaz de interpretar a multiplicação de duas linhas retas, como deu origem a uma terceira linha reta ao invés de um retângulo. Esta etapa foi de fundamental importância para tornar mais fácil a representação de curvas em termos algébricos.

Na primavera de 1619, ele tentou realizar a unificação da Aritmética com a Geometria usando compassos. O compasso desempenhou uma importante função no desenvolvimento científico do século XVI e XVII. Galileu e Descartes acreditavam que os compassos poderiam fornecer as bases para o desenvolvimento e unificação da Aritmética com a Geometria.

Numa famosa carta a Beeckman, datada de 26 de março de 1619, Descartes indica como esses compassos foram assumindo uma posição teórico fundamental em seu pensamento. Essas descoberta que foram surgindo proporcionaram toda uma nova visão para o avanço matemático. Vejamos um trecho da carta.

> Descobri quatro demonstrações admiráveis e completamente novas. A primeira refere-ser ao famoso problema de dividir um ângulo em um números qualquer de partes iguais. As outras três dizem respeito a três tipos de equações cúbicas: a primeira classe com um número inteiro, raízes e cubos [$x^3 = \pm a \pm bx$]; a segunda, com um número inteiro, quadrados e cubos [$x^3 = \pm a \pm bx^2$]; e a terceira, com com inteiro, raízes, quadrados e cubos [$x^3 = \pm a \pm bx \pm cx^2$]. [...] Com esses recursos, será possível resolver um número quatro vezes maior de problemas, e muito mais difíceis, do que se consegue com Álgebra comum. [...] Permita-me ser sincero acerca do meu projeto. O que quero produzir não é algo como a *Ars BrEvis* de Lull, mas, antes, uma ciência inteiramente nova, que irá prover uma solução geral para todos os problemas possíveis envolvendo qualquer tipo de quantidade, seja ela contínua ou discreta, de acordo com sua natureza. Pois, como na aritmética, algumas questões são resolvidas pelos números racionais, outras apenas por números irracionais e, finalmente outros podem ser imaginados, mas não resolvidos. Assim, espero poder demonstrar que alguns problemas envolvendo quantidades contínuas podem ser resolvidos por meio de curvas produzidas por um único movimento, como as curvas que podem ser traçadas com os novos compassos (penso que estas são tão exatas e geométricas quanto aquelas que são traçadas com compasso ordinários), e outros ainda que podem ser resolvidos somente por curvas geradas por movimentos distintos e idependentes, os quais, certamente, são apenas imaginários, como a notória curva quadrática (quadratriz). Não há, creio, nenhum problema imaginável, qualquer que ele seja, que não possa ser resolvido, como esses, por tais curvas. Espero poder demonstrar quais tipos de problemas podem ser resolvidos exclusivamente por um ou outro meio, de modo que quase nada em geometria reste a ser descoberto (BROUGHTON & CARRIERO, 2011).

Nesta carta, Descartes ainda diz que se pode ter um conhecimento exato das medidas das curvas, de acordo com alguns critérios que são determinados por movimentos e, que em *La géométri*e ele explica claramente em termos de equação:

> Poderia dar aqui muitos outros meios para traçar e conceber linhas curvas que fossem mais e mais compostas, por graus, até o infinito. Mas para compreender em conjunto todas as que estão na natureza, e distigui-las por ordem em certos gêneros, não conheço nada melhor que dizer que todos os pontos das que podem designar-se geométricas, isto é, que admitem certa medida precisa e exata, têm necessariamente alguma relação com os pontos de uma linha reta, que pode ser expressa por alguma equação, a mesma para todos os pontos (DESCARTES, 1886, p. 17)

Usando o compasso mesolábio, Descartes resolveu três tipos de equações cúbicas:

$$x^3 = \pm a \pm bx \pm cx^2 \qquad (1)$$

$$x^3 = \pm a \pm bx^2 \qquad (2)$$

$$x^3 = \pm a \pm bx \qquad (3)$$

onde $a$, $b$, $c$ são constantes positivas.

Veremos que a equação (3) nos dará a solução para o problema da trissecção do ângulo, onde $a$ determinará o ângulo que queremos trisseccionar e as raízes da equação cúbica, de acordo com um $a$ fixo e $b = 3$, nós dará o terço do ângulo geral dado.

Descartes, de fato, introduziu uma variedade de compassos, mas aqui descreveremos somente o compasso mesolábio que pode ser pensado como uma máquina que consiste de diversas réguas dispostas em conjunto, como mostra a figura 3 a seguir.

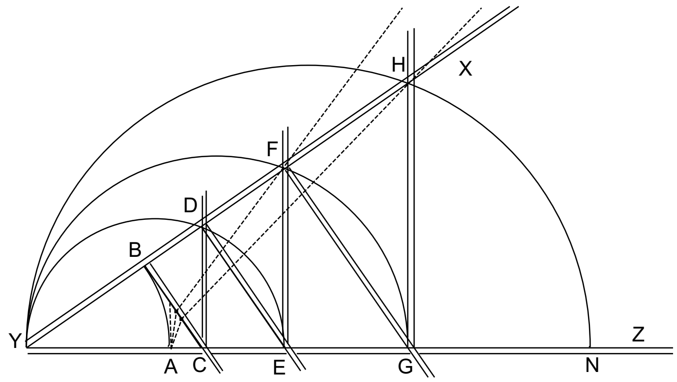


Figura 3: O compasso de Descartes.
Fonte: *Software* Cabri Geometry

Descartes, no seu segundo livro explica como é construído o compasso e como ele funciona:

> Sejam as linhas *AB*, *AD*, *A*F, semelhantes, que suponho descritas com ajuda o instrumento *YZ*, composto de várias réguas unidas de tal modo que aplicada a régua *YZ* sobre a linha AN se pode abrir ou fechar o ângulo *XYZ*, que estando todo fechado aos pontos *B*, *C*, *D*, E, F, *G*, *H*, coincidem com o ponto *A*; mas à medida que ele se abre, a régua *BC*, que faz ângulo reto com *XY* no ponto *B*, empurra para *Z* a régua *CD* que corre sobre *YZ*, formando sempre com ela ângulos retos; e *CD* empurra *D*E que corre sobre *YX*, mantendo-se paralela a *BC*; *D*E empurra EF; EF empurra F*G*; esta, *GH*; e podem imaginar-se uma infinidade de outras que se empurram sucessivamente do mesmo modo, umas formam sempre os mesmos ângulos com *YX*, e as outras com *YZ* (DESCARTES, 1886, p. 17).

Agora descartes continua sua explicação mostrando como são geradas as curvas.

> À medida que se abre o ângulo *XYZ*, o ponto *B* descreve a linha *AB*, que é um círculo; e os outros pontos *D*, *F*, *H*, que correspondem às intersecções das outras réguas, descrevem as curvas *AD*, *AF*, *AH*, das quais as últimas são, por conseguinte, mais compostas que a primeira, e esta, mais que o círculo (DESCARTES, 1886, p. 17).

A partir desse compasso podemos, através de semelhança de triângulos, obter as seguintes proporções:

$$\frac{YB}{YC} = \frac{YC}{YD} = \frac{YD}{YE} = \frac{YE}{YF} = \frac{YF}{YG} = \frac{YG}{YH} = \ldots$$

Fazendo $YA = YB = 1$ e, $YC = x$, obtemos a proporção:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} = \frac{x^2}{x^3} = \frac{x^3}{x^4} = \frac{x^4}{x^5} = \ldots$$

No livro *Cogitationes Privatae* Descartes apresenta uma solução para a equação cúbica $x^3 = x + 2$. Como vimos, da figura 3 obtemos as seguintes proporções:

$$\frac{YB}{YC} = \frac{YC}{YD} = \frac{YD}{YE}$$

Dessas proporções podemos tirar as seguintes relações:

$$YE = \frac{YD^2}{YC} \qquad (4)$$

e,

$$YD = \frac{YC^2}{YB} \qquad (5)$$

De (4) e (5), temos:

$$YE = \frac{\left(\frac{YC^2}{YB}\right)^2}{YC} = \frac{YC^4}{YB^2} \cdot \frac{1}{YC} = \frac{YC^3}{YB^2}$$

ou seja,

$$YE = \frac{YC^3}{YB^2}$$

Como $YE = YA + AC + CE$ e, fazendo $YA = YB = 1$ e $YC = x$, temos:

$$1 + (x-1) + CE = x^3$$

Assim,

$$x^3 = x + CE$$

Diante disso, tudo que precisamos fazer para resolver a equação cúbica $x^3 = x + 2$ é abrir o compasso de tal modo que $CE$ seja igual a 2 de forma que $YC$ nos dará uma raiz real positiva.

## A EQUAÇÃO DA TRISSECÇÃO DO ÂNGULO

Veremos nessa seção como transformar o problema geométrico da trissecção do ângulo em um problema aritmético. Consideremos a figura 4 onde pretendemos trissectar o ângulo $ABC$. Nosso problema[2] se resume a encontrar o ponto $E$ na figura de forma que o ângulo $DBC$ seja a terça parte do ângulo $ABC$. Para isso, vamos construir o segmento $AI$, perpendicular a $DE$. Considerando $AB = a$ e, considerando que, $DE$ é o dobro de $AB$, então $DE = 2a$. Considerando ainda que $H$ é o ponto médio de $DE$, temos que: $AH = DH = HE = a$.

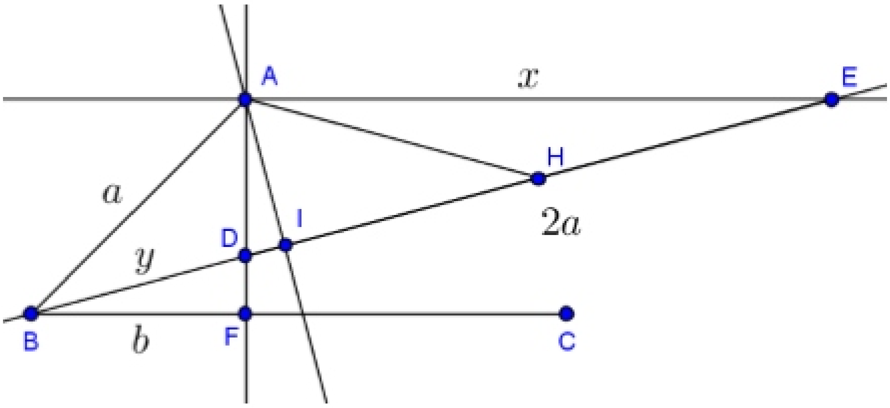


Figura 4: Transformação de um problema geométrico em um problema algébrico.
Fonte Software Geogebra

Assim como Descartes nos aconselha, vamos dar nomes aos segmentos que são indeterminados. Vamos nomear, então, $BF$ por $b$, $AE$ por $x$ e $BD$ por $y$. Sendo os triângulos $ADE$, $DFB$ e $AIE$ semelhantes, a seguinte relação é válida:

$$\frac{AE}{DE} = \frac{FB}{DB} = \frac{IE}{AE} \qquad (6)$$

O triângulo $ABH$ é isósceles, com $AB = AH$, o pé da perpendicular $AI$ em $BH$ é o pc médio de $BH$. Assim,

$$IH = \frac{1}{2}BH = \frac{y+a}{2}$$

e

$$IE = IH + HE$$

Ou seja,

$$\frac{y+a}{2} + a = \frac{y+3a}{2}$$

Assim, podemos escrever (6) da seguinte forma:

$$\frac{x}{2a} = \frac{b}{y} = \frac{y+3a}{2x} \qquad (7)$$

$a$ é um ponto qualquer de um dos lados do ângulo $ABC$, o que significa que, sem perda de generalidade, podemos tomar $AB = 1$, ou seja, $a = 1$.

[2] A solução que será apresentada é adaptada de Sousa, 2001.

Assim a relação (7) toma a forma

$$\frac{x}{2} = \frac{b}{y} = \frac{y+3}{2x}$$

donde se obtém $xy = 2b$ e $x^2 = y + 3$.

Finalmente, obtemos a equação seguinte que designaremos por equação da trissecção:

$$x^3 - 3x - 2b = 0 \qquad (8)$$

A partir da análise geométrica do problema, aplicando a técnica de semelhanças de triângulos, transpomos as investigações para um âmbito algébrico. Dessa forma, esperamos buscar uma solução aceita na matemática que não seja uma solução por Nêusis. O problema agora se restringe a equação cúbica. Está equação, será nosso objeto de estudo. Suas raízes nos permitirá deduzir quais são os ângulos passíveis de serem construídos com régua não graduada e compasso e, a partir delas [das raízes], vamos mostrar a impossibilidade de construir um ângulo geral com régua não graduada e compasso.

## NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS

Substituímos o problema anteriormente geométrico por um problema a ser resolvido por uma equação algébrica. A solução de uma equação do tipo (8) permite avaliar se é possível construir curvas geométricas com ferramentas euclidianas. "Um segmento *AP* será construtível a partir de *AB* se *P*, ou equivalentemente, se o número *x* for construtível" (OLIVEIRA, 1997, p. 126). "Dizemos que um número real positivo $\alpha$ é construtível se conseguirmos construir um segmento cuja medida do comprimento é $\alpha$, num número finito de passos a partir do segmento que tomamos como unidade, usando uma régua não graduada e compasso" (SILVA ; SANTOS, 2007, p. 57). Assim, em vez de segmentos ou figuras construtíveis, consideremos números construtíveis. Dessa forma, a interação entre esses dois campos das ciências é fundamental para a interpretação e solução do problema da trissecção do ângulo.

Existem condições necessárias para que um número seja construtível. Os números inteiros são construtíveis a partir da transferência do segmento [0,1] com o compasso. Assim, constrói-se o 2,3,4,… e os números negativos …,–3, –2, –1. Para construímos os números racionais, adotamos o procedimento que Descartes usou para encontrar o quociente de um número.

Traçamos duas retas concorrentes no ponto *A*. Uma reta horizontal *AB* e uma reta oblíqua *AC* (figura 5). Vamos considerar o segmento de reta *AB* a unidade, ou seja *AB* = 1.

Unindo-se os pontos *B* e *C* obtemos o segmento de reta *BC*. Paralelo a *BC* traçamos quantos outros quisermos, sempre paralelos. Seja *DE* um segmento paralelo a *BC*. Assim, como *AC* é proporcional a AE e AB é proporcional a AD e possui o ângulo BAC em comum, os triângulos *ABC* e *ADE* são proporcionais, então podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}\text{. Como } AB=1\text{, temos: } AC=\frac{AE}{AD}$$

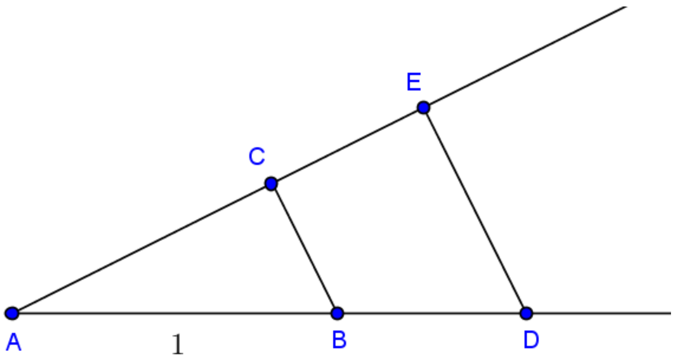


Figura 5:Construção geométrica de um número racional.
Fonte: *Software* Geogebra

Por exemplo, seja construir o número racional $\frac{2}{3}$. Traçamos uma reta horizontal deteminada pelos pontos *A* e *B* e uma reta oblíqua a esta passando por *A*. Devemos dividir então o segmento *AB* em três partes iguais cada uma correspondendo a $\frac{1}{3}$ do segmento *AB*. Partindo de *A*, marcamos com um compasso, três pontos equidistantes entre si. Sejam eles, *C*, *D* e *E* como mostra a figura 6 abaixo.

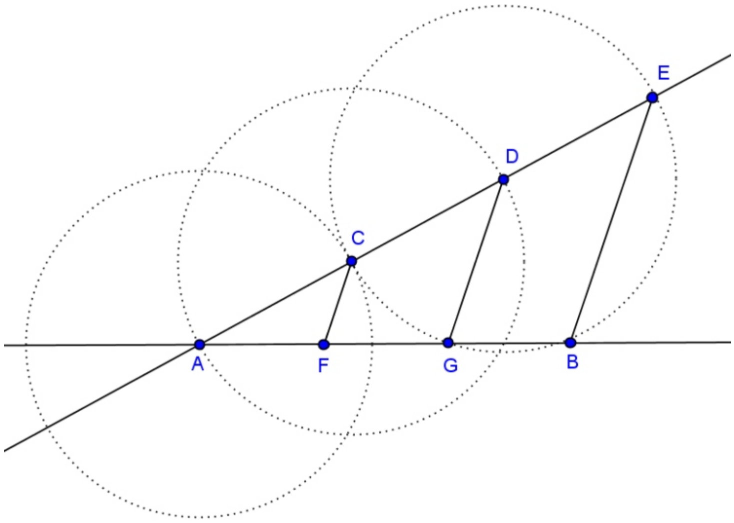


Figura 6: Construção geométrica do númeor 2/3.
Fonte: *Software* Geogebra

Traçamos o segmento de reta *BE*. Paralelo a *BE* traçamos *GD* e *FC*, onde *F* e *G* são, respectivamente, os pontos de intersecção do segmento *FC* e *GD* com a reta horizontal *AB*. Os triângulos formados na figura 6 são proporcionais por terem seus respectivos lados proporcionais e o ângulo $EAB$ em comum, então podemos escrever a seguinte proporção:

$$\frac{AB}{AE}=\frac{AG}{AD}$$

$AB = 1$, $AE = 3AC$ e $AD = 2AC$, então:

$$\frac{1}{3AC}=\frac{AG}{2AC}$$

Ou seja,

$$AG=\frac{2}{3}$$

Concluimos que partindo da unidade, através de um número finito de vezes, das operações aritméticas básicas, que correspondem à estrutura de corpo[3], é possível construir o conjunto dos números racionais. Portanto, o conjunto Q dos números racionais é construtível. Veremos mais adiante que, com a teoria de extensão de corpos, é possível construir números irracionais como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc. No entanto não é possível construir todos os números reais devido ao fato dos números transcedentes, como por exemplo, o número $\pi$ e o número $e$, não serem construtíveis.

Uma condição não suficiente, mas necessária para que um número $\alpha$ pertencente a um conjunto $F_0$ seja construtível, é que exista uma extensão do corpo $F_0$, ou seja, exista $F_1$ tal que $F_0 \subset F_1$. A extensão desse corpo, por sua vez, deve ser uma extensão quadratica, isto é, que exista uma extensão $F(\alpha)$ de F de tal forma que $\alpha^2 \in F$ e $\alpha \notin F$. Como exemplo, vamos considerar $\alpha = \sqrt{2}$. Podemos dizer que $\alpha$ é um número que pertence ao conjunto dos números reais e $\alpha^2$ é um número que pertence ao conjunto dos números racionais, dessa forma, $\alpha^2 \in Q$ e $\alpha \notin Q$. Esse número $\alpha$ é raiz de um polinômio $p(x) = x^2 - 2$.

Dessa forma, chegamos a conclusão de que um número $\alpha$ é construtível se ele for raiz de um polinômio mônico[4], irredutível[5] e não nulo $p(x)$. Nesse caso, dizemos que $\alpha$ é um número algébrico. O número $\pi$, por exemplo, não é um número algébrico, pois $\pi$ não é raiz de nenhum polinômio $p(x)$. Sendo assim, esse número não é construtível enquanto que $\sqrt{\alpha}$ é um

[3] Para um estudo da estrutura de corpo ver GONÇALVES, 1979.
[4] Mônico: o termo de maior grau é 1.
[5] Irredutível quando os únicos divisores do polinômio são constantes, ou seja, o único divisor do polinômio $p(x)$ é uma constante $c$.

número construtível. De fato, dado o segmento de comprimentos 1 e $\alpha$ é possível construir um segmentos de comprimento $\sqrt{\alpha}$ . Vejamos como isso é feito:

Sobre uma reta transporta-se $OA = \alpha$ e $AB = 1$; traça-se uma circunferência com diâmetro $OB = \alpha+1$ (figura 7); traça-se uma perpendicular a $OB$ por $A$, a qual corta a circunferência em $C$. O triângulo $OBC$ tem um ângulo reto em $C$. Logo $\angle OCA = \angle ABC$ por serem semelhantes os triângulos retângulos $OAC$ e $CAB$; e tem-se, para $x = AC$; a seguinte relação

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{1} \Rightarrow x^2 = \alpha \Rightarrow x = \sqrt{\alpha}$$

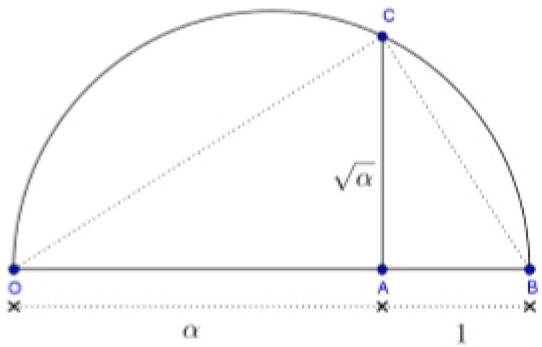


Figura 7: Representação geométrica da raiz quadrada de um número.
Fonte: *Software* Geogebra

Tendo construído $\sqrt{\alpha}$, pode-se também construir todos os números da forma $a+b\sqrt{\alpha}$, em que $a$ e $b$ pertencem a $\mathbb{F}_0$. O conjunto dos números da forma $a+b\sqrt{\alpha}$ $\in \mathbb{F}_1$. Podemos observar que $\mathbb{F}_0 \subset \mathbb{F}_1$, pois para todo $\alpha \in \mathbb{F}_0$, é possível escrever $a = a + 0\sqrt{\alpha}$ $\in \mathbb{F}_1$.

Pode-se mostrar[6] também que são construtíveis números que resultam das quatro operações elementares entre os elementos de $\mathbb{F}_1$. Por exemplo, para $a, b, c, d \in \mathbb{F}_0$,

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} = \frac{ac-2bd}{c^2+2d^2} + \frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2} = p + q\sqrt{2}$$

sendo $p$ e $q \in \mathbb{F}_0$ e $c^2 - 2d^2 \neq 0$.

[6] Para mais detalhes (Precioso; Pedroso, 2011)

Vejamos a representação geométrica de $\dfrac{c+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}$.

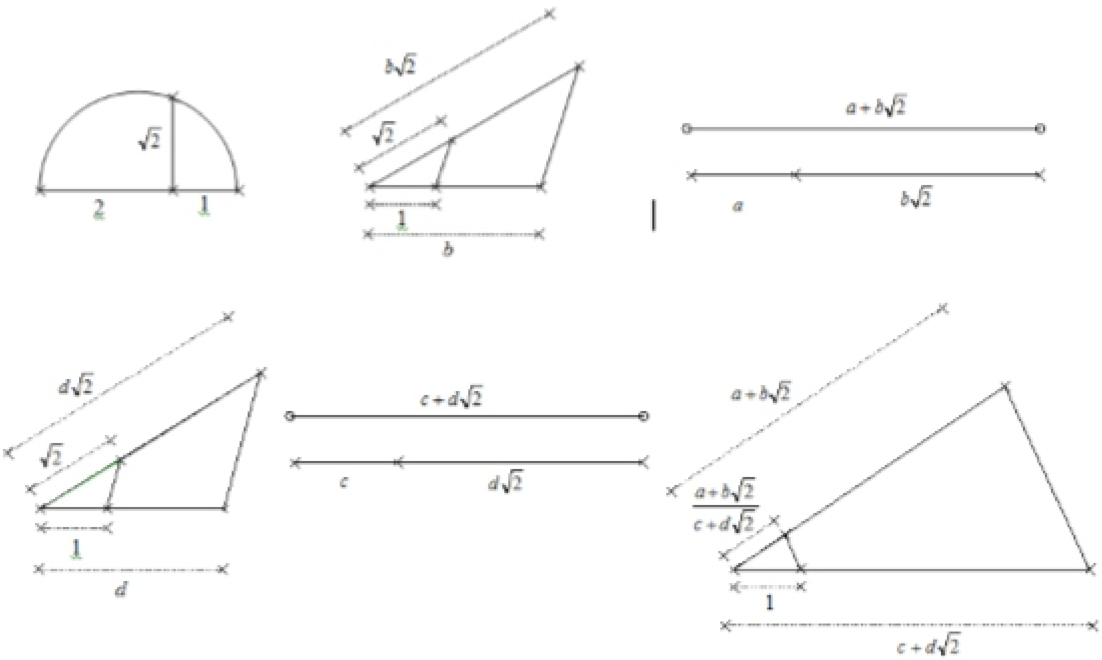


Figura 8: Representação geométrica da extensão de uma raiz quadrada.
Fonte: *Software* Cabri Geometry



Suponhamos que é possível construir todos os números de um corpo F. Escolhendo $\alpha$ em F tal que $\sqrt{\alpha} \notin$ F, pode-se construir $\sqrt{\alpha}$ e, assim, o corpo F' de todos os números $a+b\sqrt{\alpha}$ em que *a*, *b* $\in$ F. Por exemplo, considere-se F = $F_1$ e $\alpha = 1+\sqrt{2}$. Pode-se observar da figura 9, que $\sqrt{\alpha} = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ é construtível.

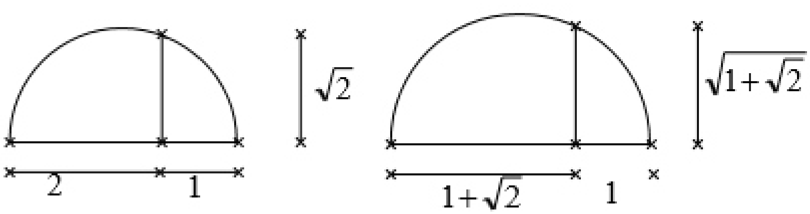


Figura 9: Adjunção da raiz quadrada de dois.
Fonte: *Software* Cabri Geometry

Portanto, é possível construir o corpo F' de todos os números da forma $p+q\sqrt{1+\sqrt{2}}$, em que $p=a+b\sqrt{2}$ e $q=c+d\sqrt{2}$ com *a, b, c, d* $\in$ $F_0$ = Q. Diz-se que o corpo F' é obtido de F mediante adjunção de $\sqrt{\alpha}$.

Como já dissemos, uma condição necessáia para que um número seja construtível é que ele possua uma extensão quadrática e seja raiz de um polinômio não nulo, mônico e irredutível. O seguinte teorema, denominado teorema da raiz racional, é importante para verificarmos se o polinômio é irredutível.

**Teorema da Raiz-Racional:** Seja $f$ um polinômio tal que $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \neq 0$. Se $\frac{r}{s}$ for raíz racional de $f$ (com $r \in Z$ e $s \in Z\backslash\{0\}$ e $r$ e $s$ primos entre si), então $r \backslash a_0$ e $s \backslash a_n$.

**Demonstração:** Se $\frac{r}{s}$ é raíz de $f(x)$ então $f\left(\frac{r}{s}\right) = 0$;

ou seja,

$$a_0 + a_1(r/s) + \ldots + a_{n-1}(r/s)^{n-1} + (r/s)^n = 0.$$

Resolvendo essa última equação temos que:

$$s^n a_0 + a_1 s^{n-1} r + \ldots + a_{n-1} r^{n-1} s + a_n r^n = 0$$

e logo

$$r(a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r^{n-2} s + a_n r^{n-1}) = -a_0 s^n$$

Sendo assim, o primeiro membro da equação é múltiplo de $r$, pelo que também, o segundo membro o é. Ou seja, $r \backslash a_0 s^n$. Como, por hipótese, $r$ e $s$ são primos entre si, e $s^n$ tem um número finito de divisores resulta que, ao fim de um número finito de tentativas, encontramos que $r \backslash a_0$. De modo análogo, se tivessemos dado à expressão

$$s^n a_0 + a_1 s^{n-1} r + \ldots + a_{n-1} r^{n-1} s + a_n r^n = 0$$

a forma equivalente

$$s(a_0 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r^{n-2} s) = -a_n r^n$$

e efetuando um raciocínio análogo, concluiríamos que $s \backslash a_n$, como pretendíamos.

Podemos agora analisar a equação da trissecção do ângulo, isto é, a equação

$$x^3 - 3x - 2b = 0$$

Trissectar um ângulo ABC significa procurar as raizes da equação acima e verificar se é construtível.

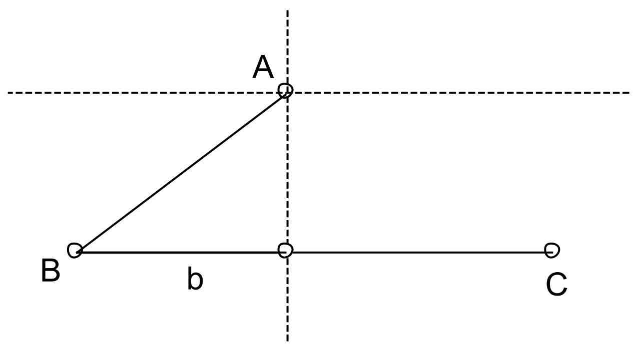


Figura 10: Interpretação geométrica da equação cúbica de trissecção do ângulo.
Fonte: *Software* Cabri Geometry

O ângulo a ser trissectado depende do valor de $b$. Considerando $b = 0$ na equação acima obtemos:

$$x^3 - 3x = 0,$$

que corresponde ao ângulo de $90^0$ (figura 10), que pode ser trissectado usando ferramentas euclidianas, bastando para isso, encontramos ângulos de $30^0$.

Devemos observar que a equação cúbica

$$x^3 - 3x = 0$$

não é irredutível permitindo ser escrita como o produto de dois polinômios, tais como

$$p(x) = x(x^2 - 3),$$

cujas raízes são, respectivamente, $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{3}$ que, como já vimos, são números construtíveis.

O valor de $x = \sqrt{3}$ se refere a um ângulo de $60^0$. De fato, seja $\theta = arc\ tg\sqrt{3}$, logo $\theta = 60^0$. Como $\sqrt{3}$ é construtível concluímos que o ângulo $\theta = 60^0$ é também construtível. O complementar do ângulo de $60^0$ é o ângulo de $30^0$ que é construtível, pois $\cos 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ é construtível. Portanto o ângulo de $90^0$ pode ser trisseccionado utilizando-se régua não graduada e compasso.

Agora, fazendo, $b = \dfrac{1}{2}$ a equação se reduz a $x^3 - 3x - 1 = 0$. Para obtermos a equação da trissecção do ângulo fizemos, sem perda de generalidade, o lado $AB$ do ângulo $ABC$ valer 1 e, fazendo agora $b = \dfrac{1}{2}$, temos o seguinte triângulo retângulo:

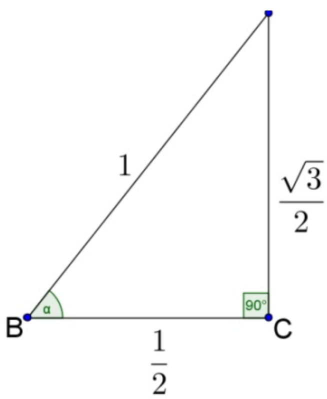


Figura 11: Trissecção do ângulo de 60 .
Fonte: *Software* Geogebra

$tag(\alpha)=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$, logo $\alpha = arctag\sqrt{3}$, ou seja, $\alpha = 60°$. Sendo assim, o ângulo que pretendemos dividir é o de $60^0$. Queremos, portanto, dividir o ângulo de 60° em três partes iguais. Neste caso, cada ângulo terá medida de 20°.

Da trigonometria temos a seguinte relação:

$$\cos(3\alpha)=4\cos^3(\alpha)-3\cos(\alpha)$$

Assim,

$$\cos(60°)=\cos(3\times 20°)=4\cos^3(20°)-3\cos(20°)$$

Como $\cos(60°)=\frac{1}{2}$, temos que:

$$8\cos^3(20°)-6\cos(20°)=1$$

Então, $cos(20)$ é solução da equação do tipo $8y^3 - 6y - 1 = 0$. Fazendo $y = 2x$ chegamos ao polinômio $p(x) = x^3 - 3x - 1$, donde $2cos(20)$ é uma raiz de $p(x)$. Apesar de existir uma raiz para o polinômio mônico e irredutível $p(x)$ esta, por sua vez, não possui uma extensão quadrática. Dessa forma, o número $2cos(20)$ não é construtível, sendo assim, não é possível construir o ângulo de 20° com régua não graduada e compasso, impossibilitando dividir o ângulo de 60° em três partes iguais. Portanto, não é possível dividir um ângulo qualquer com apenas ferramentas euclidianas.

## CONCLUSÃO

Nesse trabalho nós procuramos mostrar como a complementaridade entre a aritmética e a geometria tornou possível o esclarecimento das dificuldades encontradas pelos gregos no problema da trissecção do ângulo. Com a transformação desse problema geométrico em um problema aritmético e apoiado na teoria dos números construtíveis foi possível afirmar a impossibilidade de tal construção. Dessa forma fica evidente a importância da complementaridade entre a aritmética e a geometria na resolução de problemas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BROUGHTON, J., & CARRIERO, J. **Descartes.** Porto Alegre: Artmed, 2011.

DESCARTES, R. **Discurso do Método**. São Paulo: Ática, 1989.

_____________ **La Géométrie**, 1886. Bibliothèque nationale de France. disponível em: <http://visualiseur.bnf.fr/CadresFenetre?O=NUMM-29040&I=2&M=tdm>. Acesso em: 05 de Maio de 2013.

EVES, H. **Introdução a História da Matemática.** 3ª ed. Trad. H. H. Domingues, Campinas: Editora da Unicamp, 2002.

GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA: Projeto Euclides, 1979.

OLIVEIRA, A. J. **Transformações Geométricas.** Universidade Aberta, 1997.

PRECIOSO, J. C., & PEDROSO, H. A. **Construções Euclidianas e o Desfecho de Problemas Famosos da Geometria.** Revista Ciências Exatas e Naturais , Vol. 13, 163-183, 2011.

SILVA, J. R., & SANTOS, R. **Temas de Geometria nos Ensinos Básico e Secundário.** Aveiro: Universidade de Aveiro , 2007.

SOUSA, J. M. **Trissecção do Ângulo e Duplicação do Cubo***:* as Soluções na Antiga Grécia. Dissertação submetida a Faculdade de Ciências da Universidade do porto, 2001.

STRUIK, J. D. **A Concise History of Mathematics.** United States fo America. Dover Publications, 1987.