VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática
ULBRA - Canoas - Rio Grande do Sul - Brasil
16, 17 e 18 de outubro de 2013
Relato de Experiência

MODELOS MATEMÁTICOS PARA A EXPECTATIVA DE VIDA DOS BRASILEIROS

Joice Viviani Birk[1]

Eliete Biasotto Hauser[2]

Vandoir Stormowski[3]

Modelagem Matemática

Resumo: Neste trabalho de pesquisa analisou-se a expectativa de vida das mulheres brasileiras a partir dos dados da Tábua Completa de Mortalidade disponibilizada pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Utilizando o critério dos mínimos quadrados construiu-se dois modelos polinomiais, de grau 3 e 4, os quais reproduzem razoavelmente os dados medidos (soma do quadrado dos resíduos é pequena), porém, não são adequados para realizar estimativas futuras. A solução analítica da equação diferencial de Gompertz ou função Sigmoidal, com assíntota escolhida via simulação computacional e dados iniciais da tábua de mortalidade do IBGE, foi a que melhor reproduziu os dados escolhidos. A validação e comparação dos modelos matemáticos obtidos foram realizadas graficamente e numericamente. Comparou-se os valores obtidos pelos modelos matemáticos escolhidos com os dados reais e estimou-se as expectativas futuras.

Palavras Chaves: Expectativa de vida. Tábuas de mortalidade. Curva de Gompertz.

INTRODUÇÃO

Tem-se por objetivo principal desse estudo analisar dados referentes à expectativa de vida dos brasileiros, informações estas que estão contidas nas tábuas de mortalidade disponibilizadas pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE, bem como a partir desses, modelar matematicamente por diferentes métodos a expectativa de vida dos

[1]Estudante da graduação em Matemática. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. E-mail: joice.birk@acad.pucrs.br.
[2]Doutora em Matemática Aplicada. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. E-mail: eliete@pucrs.br.
[3]Mestre em Matemática. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul. E-mail: vandoir.stormowski@pucrs.br.

brasileiros, primeiramente com um parâmetro escolhido a priori para as mulheres, e futuramente, de maneira separada, para homens e ambos os sexos.

A importância da escolha do melhor modelo vem pela intenção de se projetar expectativas futuras, ou seja, anos em que o IBGE não estimou a expectativa de vida dos brasileiros. Isso poderá auxiliar numa importante relação entre o presente e o futuro quando se fala em vida laboral.

No presente estudo, descreve-se aspectos relativos à expectativa de vida dos brasileiros, uma breve explicação de como o IBGE coleta os dados para o censo e como ocorre a divulgação dos resultados para a expectativa de vida.

Apresenta-se também uma breve fundamentação teórica e matemática dos modelos escolhidos. Estão divididos em: Modelagem Numérica (ajuste polinomial através do critério dos mínimos quadrados) e Modelagem Analítica (Equação Diferencial de Gompertz). Diante destes, têm-se as devidas análises dos dados, a validação, comparação dos resultados e as projeções da expectativa de vida futura.

Por fim, como conclusão, expõe-se, a partir da análise dos resultados, um fechamento de idéias referente o estudo desenvolvido, e, as sugestões relativas a este estudo.

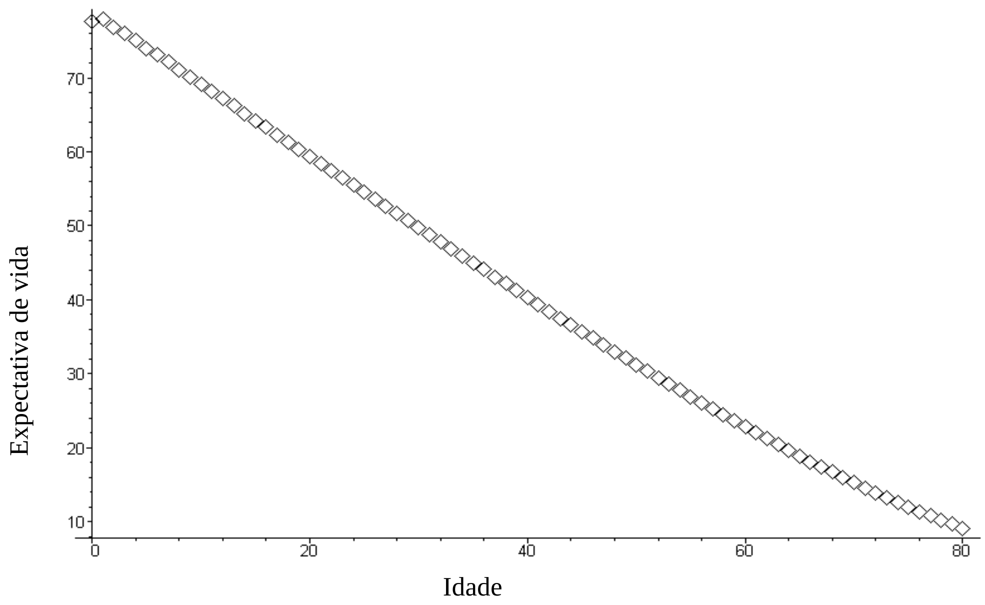
A EXPECTATIVA DE VIDA

A construção da esperança ou expectativa de vida ao nascer de cada brasileiro, para informações oficiais do governo, é feita anualmente com a utilização dos dados do censo demográfico realizado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE, sempre até o dia 1º de dezembro de cada ano, em cumprimento ao Artigo 2º do Decreto Presidencial n° 3.266 de 29 de novembro de 1999. Censo Demográfico é reunião de dados estatísticos sobre características populacionais, é realizado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE, desde 1940.

De acordo com o site do IBGE (www.ibge.gov.br, acesso em maio de 2013), tais informações constam nas Tábuas de Mortalidade da população do Brasil, onde a cada ano são incorporados dados populacionais do último Censo Demográfico, que acontece de 10 em 10 anos.

A seguir, com a utilização do sistema de computação algébrica e simbólica Maple, foi possível ilustrar em forma de gráfico os dados da população brasileira disponibilizados pelo IBGE (neste caso, dados referente às mulheres), com referência à Tábua de Mortalidade de 2011.

Pontos da Tábua de Mortalidade



Fonte: A autora (2013).

As Tábuas utilizadas neste estudo são provenientes de uma projeção dos níveis de mortalidade a partir da Tábua de Mortalidade construída no ano de 2010, na qual foram incorporados dados populacionais do Censo Demográfico 2010. Trata-se de um procedimento necessário de atualização, quando se trabalha com indicadores e modelos demográficos prospectivos.

MODELAGEM MATEMÁTICA

A Modelagem Matemática é livre e espontânea, ela surge da necessidade do homem em compreender os fenômenos que o cercam para interferir ou não em seu processo de construção. O processo de modelagem é descrito por diversos autores, dentre os quais destacamos Bassanezi (2002), Batschelet (1978) e Biembengut (2000).

Ela tem como objetivo interpretar e compreender os mais diversos fenômenos do cotidiano, pelas aplicações dos conceitos matemáticos. Podem-se descrever estes fenômenos, analisá-los e interpretá-los com o propósito de gerar reflexões sobre tais fenômenos que cercam o cotidiano.

Tomando a expectativa de vida como objetivo de estudo, resolveu-se modelar matematicamente afim de encontrar um modelo que melhor reproduzisse os dados coletados. Assim, a modelagem foi dividida em duas partes: modelagem numérica, que inclui o ajuste de funções polinomiais (de grau 3 e 4) através do critério dos mínimos quadrados; e modelagem analítica, abrangida pela função de Gompertz.

MODELAGEM NUMÉRICA: AJUSTE DE FUNÇÕES

O ajustamento é uma técnica de aproximação. Diante de dados experimentais, $(x_i, y_i),\ i = 0,1,...,n$, pretende-se obter a lei $y = f(x)$ relacionando *x* com *y*.

Para ajustar uma tabela de dados a uma função é necessário conhecer a natureza física do problema, determinar o tipo de curva a que se ajustam os valores tabulados (graficamente e/ou cálculo das diferenças finitas ou divididas) e, calcular os parâmetros da curva. A técnica do ajuste de funções a seguir fundamenta-se em Burden (2003), Chapra (2002) e Cláudio (1994).

Critério dos Mínimos Quadrados para o modelo Polinomial

Seja $Y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_p x^p$ a função de ajustamento.

Dada uma tabela com n+1 pontos (x_i, y_i), chama-se resíduo a diferença entre o valor de Y_i da função de ajustamento e o valor medido de y_i, ou seja: $Y_i - y_i = \delta_i, \quad i = 0,1,...,n$.

O critério dos mínimos quadrados estabelece que a soma do quadrado dos resíduos, $\sum_{i=0}^{n} \delta_i^2$, deve ser a menor possível.

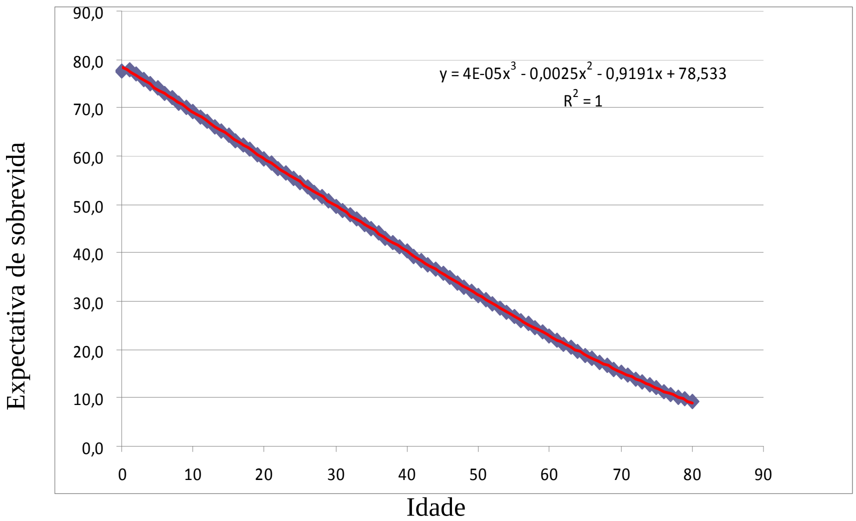
Seja $F(a_0, a_1, \ldots a_p) = \sum_{i=0}^{n} (Y_i - y_i)^2$.

Para F ter valor mínimo, é preciso que: $\frac{\partial F}{\partial a_0} = 0$; $\frac{\partial F}{\partial a_1} = 0$; . . . ; $\frac{\partial F}{\partial a_p} = 0$.

De acordo com o critério dos mínimos quadrados, com a utilização do software Excel foi possível ajustar os dados contidos nas Tábuas de Mortalidade para as Mulheres a polinômios. Os polinômios que mais se aproximaram dos dados coletados foram o de grau 3 e o de grau 4, apresentados nas figuras a seguir:

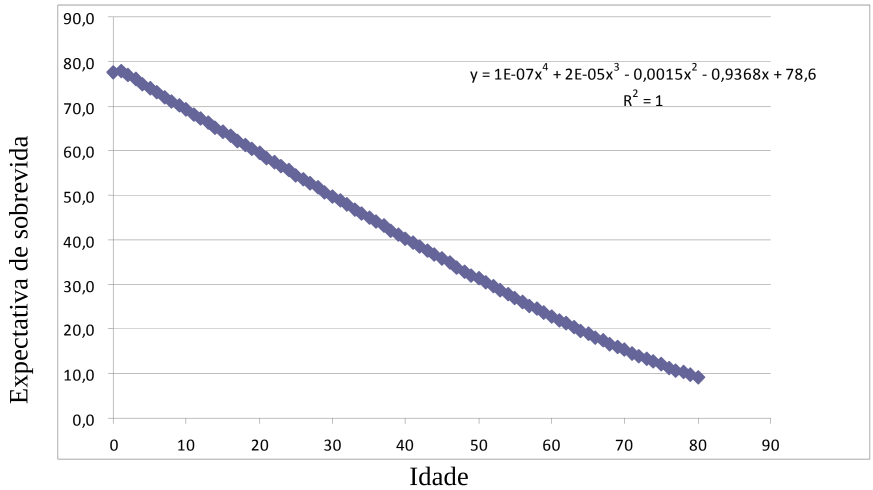
Mulheres:

Polinômio de grau 3 para Mulheres



Fonte: A autora (2013).

Polinômio de grau 4 para Mulheres



Fonte: A autora (2013).

MODELAGEM ANALÍTICA

Uma Curva de Gompertz, também conhecida por Lei de Gompertz, assim nomeada devido a seu desenvolvedor Benjamin Gompertz, ou ainda por Modelo Sigmoidal, é um modelo matemático relativo a séries temporais para análise de regressão não linear, onde o crescimento é menor no começo e no fim do período temporal. Esse estudo analítico tem por base os autores Batschelet (1978) e Zill (2003).

Primeiramente realizou-se uma busca por modelos que melhor representassem os dados da Tabua de Mortalidade referente às mulheres utilizando o software CurveExpert. Nessa busca, o modelo que se mostrou mais adequado foi a função de Gompertz. Essa análise encontrou como assíntota y = 90,58.

Equação Diferencial de Gompertz

Considerando a expectativa de vida E(t)=E, o modelo de Gompertz é expresso pela equação diferencial ordinária de primeira ordem de variáveis separáveis:

$$E'(t) = -b.\ln\left(\frac{a}{E(t)}\right)E(t) \tag{1}$$

ou

$$\frac{dE}{dt} = -b.\ln\left(\frac{a}{E}\right)E \qquad (2)$$

Na equação (2), separamos as variáveis e integramos por partes:

$$\int \frac{dE}{E.\ln\left(\frac{a}{E}\right)} = \int -b.dt \qquad (3)$$

A integral do lado esquerdo da equação (3) é obtida fazendo a mudança de variáveis:

$$u = \ln\left(\frac{a}{E}\right) \qquad (4)$$

Então, $du = \left(\frac{1}{E}\right).dE = \frac{dE}{E}$ (5)

Substituindo (4) e (5) em (3), temos:

$$\int \frac{1}{u} du = \int -b.dt \qquad (6)$$

Assim obtemos:

$$\ln u = -bt + c \qquad (7)$$

Substituindo (4) em (7):

$$\ln\left(\ln\left(\frac{a}{E}\right)\right) = -bt + c \qquad (8)$$

Então:

$$e^{\ln\left(\ln\left(\frac{a}{E}\right)\right)} = e^{-bt+c} \Rightarrow \ln\left(\frac{a}{E}\right) = e^{-bt}.e^{c} \qquad (9)$$

Assim, com $k = e^c$ obtem-se $e^{\ln\left(\frac{a}{E}\right)} = e^{ke^{-bt+c}} \Rightarrow \left(\frac{a}{E}\right) = e^{ke^{-bt}}$ (10)

E então $E = \frac{a}{e^{ke^{-bt}}}$ (11)

Finalmente, obtemos a solução geral da equação diferencial ordinária (1), conhecida como função de Gompertz:

$$E(t) = ae^{-ke^{-bt}} \qquad (12)$$

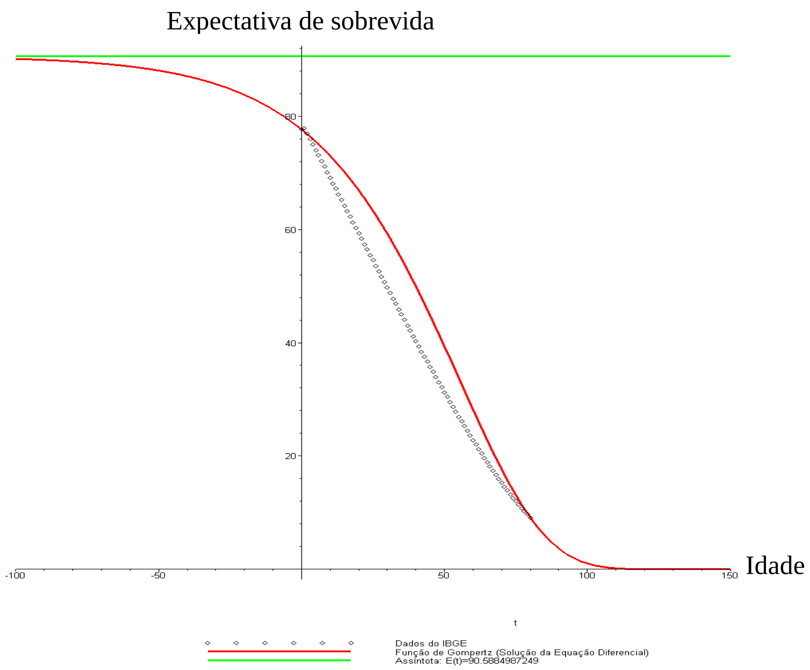
Na equação (12) utilizou-se como assíntota a = 90,58, estimada e obtida via simulação computacional no sistema CurveExpert. Escolheu-se os valores do Censo E(0) = 77,7 e E(80) = 9,1 e obteve-se b=-0,03382915974 e k=0,1534664966.

Assim, a função de Gompertz, para o presente estudo tem a forma:

$$E(t) = 90{,}58\, e^{-0{,}1534664966\, e^{-(-0{,}03382915974)\,t}}$$

A figura a seguir, ilustrada graficamente através do sistema de computação algébrica e simbólica Maple, apresenta a solução da equação diferencial ordinária (12):

Função de Gompertz com parâmetros estimados



Fonte: A autora (2013).

COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS, VALIDAÇÃO E ESTIMATIVAS FUTURAS

Inicia-se analisando o comportamento gráfico dos modelos obtidos na seção anterior.

Visando comparação de resultados, foi obtida via simulação computacional no sistema CurveExpert outra função de Gompertz, de acordo com a saída do sistema a seguir e ilustrada graficamente na figura a seguir.

“Gompertz Relation: y=a*exp(-exp(b-cx))

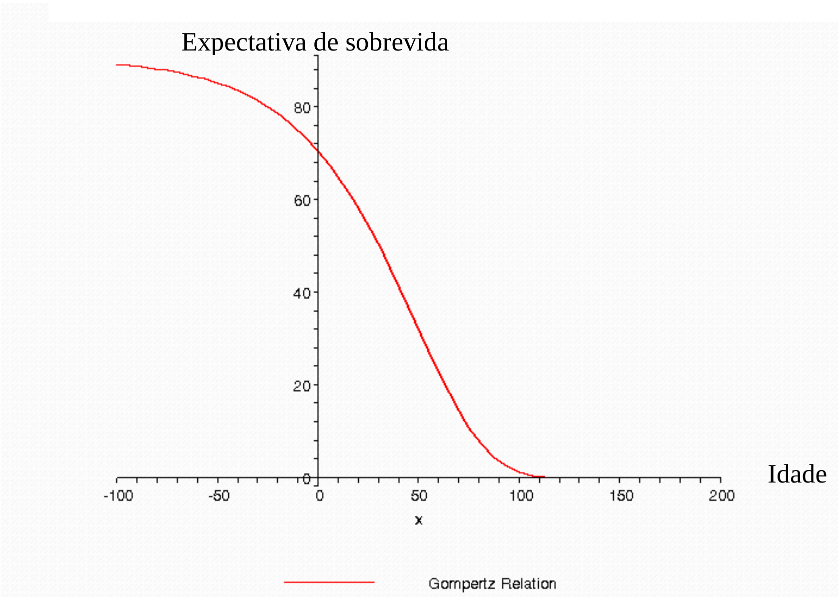
Coefficient Data:

a := 9.05884987249E+001

b := -1.39216036197E+000

c := -2.85393159802E-002”

Relação de Gompertz



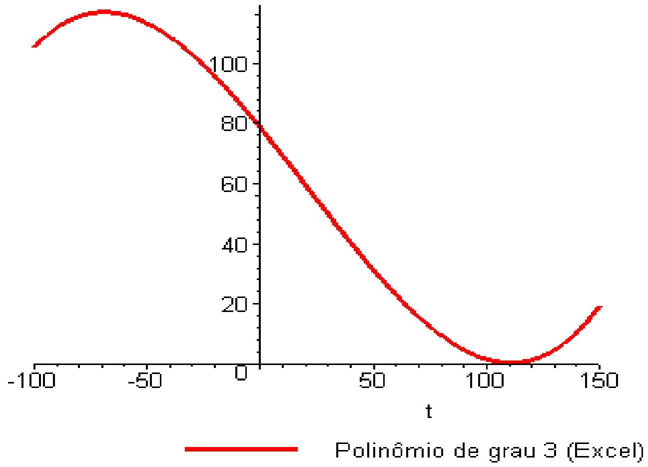
Fonte: A autora (2013).

Utilizando o sistema Maple é possível reproduzir todos os modelos estudados sendo ilustrado para um intervalo de -100<t<150, com a finalidade de avaliar expectativas além dos dados estimados pelo IBGE, ou seja, fora do intervalo de 0 a 80 anos para o ano de 2011, conforme segue nas figuras a seguir.

A resolução do modelo polinomial de grau 3 foi resolvida por meio do sistema Excel, com a equação $y = 4E\text{-}05x^3 - 0{,}002x^2 - 0{,}919x + 78{,}53$ com $R^2 = 1$.

Modelo Polinomial de grau 3

Expectativa de sobrevida



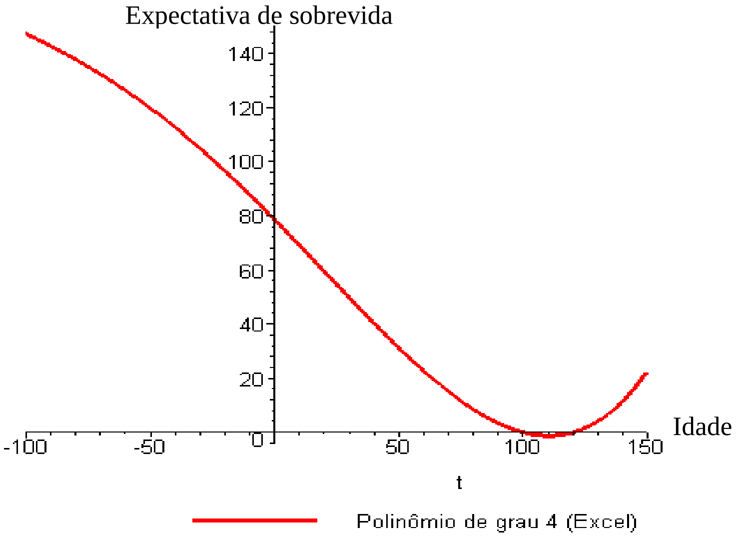
Idade

Fonte: A autora (2013).

3 não será adequado para as previsões futuras. Para obter, por exemplo, a expectativa de vida de quem nascerá em 2111, ou seja, para um t=-100 , tem-se que ela possui um ponto de máximo e após esse ponto decresce, fazendo com que a expectativa de vida desses indivíduos que nascerão nessa data seja menor do que a expectativa dos que nascerão alguns anos antes; ou ainda, para analisar a expectativa de vida de uma pessoa aos 150 anos, ou seja, para um t=150, tem-se que será maior do que uma pessoa aos 100 anos de idade, o que não é compreensível.

A resolução do modelo polinomial de grau 4 foi realizada por meio do sistema Excel, com a equação $y = 3E\text{-}07x^4 - 2E\text{-}05x^3 + 0,0008x^2 - 0,9576x + 75,102$ com $R^2 = 1$.

Modelo Polinomial de grau 4

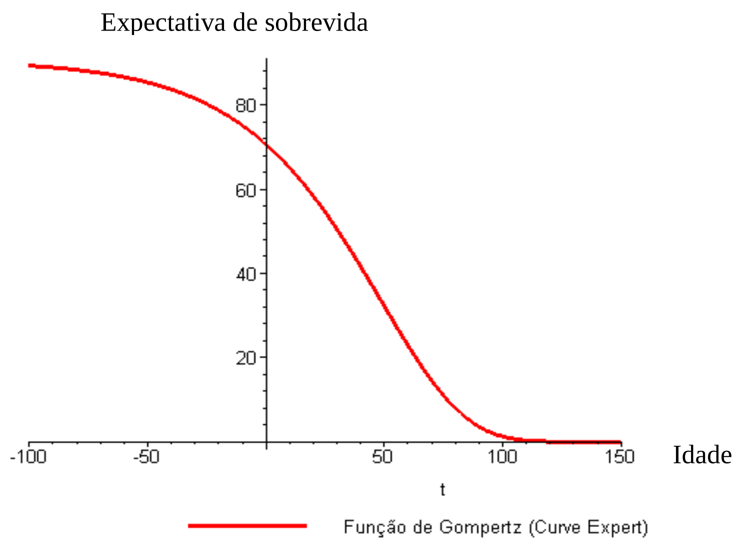


Fonte: A autora (2013).

Da mesma forma que na análise anterior, o polinômio de grau 4 não é adequado para estimativas futuras.

Na figura a seguir apresenta-se o modelo de Gompertz encontrado com o auxílio do CurveExpert, mediante a função y=90,5884987249*EXP(-EXP(-1,39216036197+0,0285393159802*t. Nesse modelo a estimativa em t=-100 é E(-100)=89,30050751.

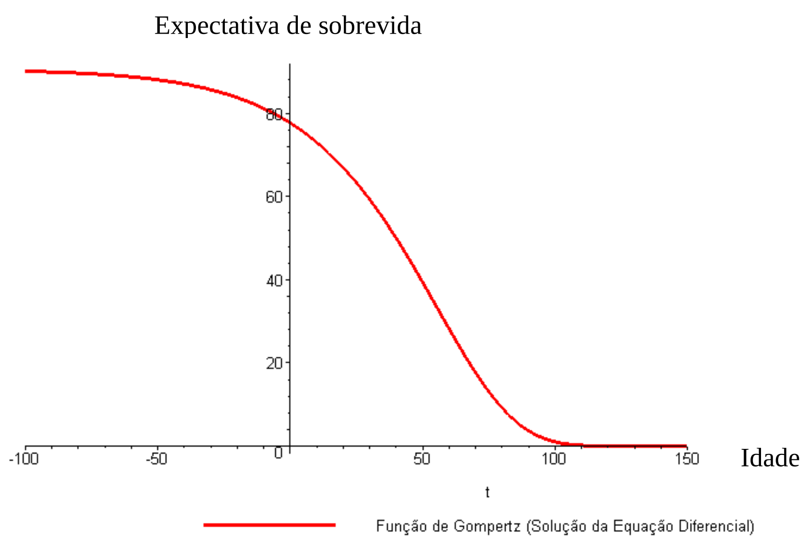
Função de Gompertz



Fonte: A autora (2013).

Verifica-se que com esse modelo, os pontos obtidos são bastante distantes dos reproduzidos pela tábua do IBGE, apesar de apresentar uma curva semelhante, seus dados não se aproximam, tornando os erros absolutos muito altos, ou seja, distantes de 0.

Função de Gompertz



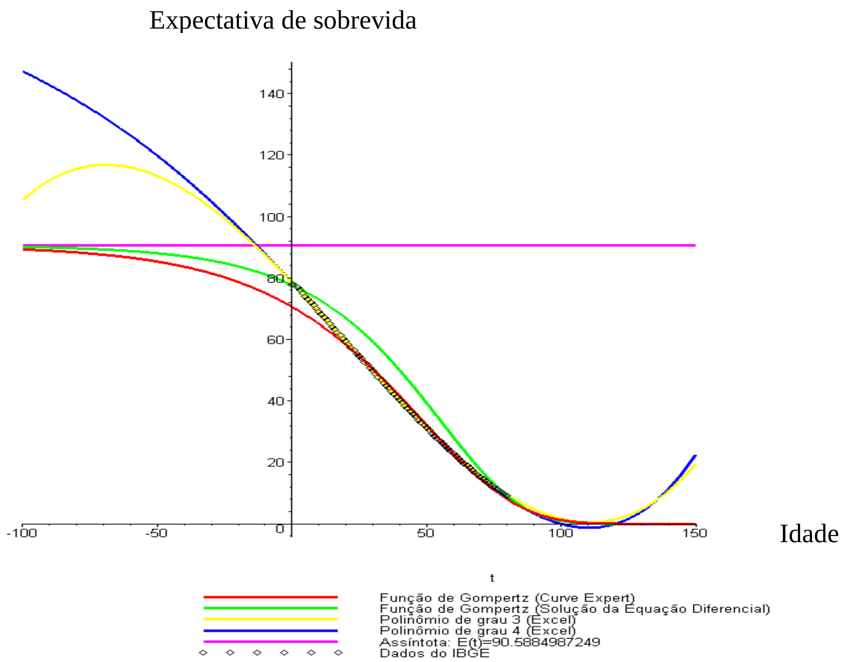
Fonte: A autora (2013).

Verifica-se que com esse modelo resolvido por meio da equação diferencial ordinária, com a equação y = 90,588*EXP(-0,1534664966*EXP(0,03382915974*t)) que os pontos obtidos dentro dos anos estudados pelo IBGE, podem até não reproduzirem-se semelhantemente, mas o que é importante ressaltar nessa função, e sendo assim, o motivo pelo qual se admitiu como a melhor reprodução, é que nos anos em que não há a expectativa de vida do IBGE, ela apresenta estimativas com pontos razoáveis e compreensíveis, como por exemplo no intervalo de -100 a 150.

Por exemplo, a expectativa de vida de quem nascerá em 2111 é estimada por E(-100) resultando em aproximadamente 90,11727021.

Finalmente, na figura seguinte, apresenta-se o comportamento gráfico de todos os modelos estudados num único sistema de eixos:

Função de Gompertz



Fonte: A autora (2013).

A seguir, detalha-se uma análise quantitativa deste trabalho.

Na tabela 1 comparou-se os da Tábua de Mortalidade do IBGE de 2011 (referente às mulheres) com os estimados pelos modelos matemáticos:

Tabela 1 – Estimativas das expectativas de vida dos modelos estudados

Idade em 2011 (t)	IBGE (2011)	Polinômio de: grau 3 (via Excel)	Polinômio de: grau 4 (via Excel)	Função de Gompertz (CurveExpert)	Função de Gompertz (Solução da Equação Diferencial)
0	77,7	78,5	78,6	70,7	77,7
10	69,1	69,1	69,1	65,1	73,0
20	59,4	59,5	59,4	58,4	67,0
30	49,8	49,8	49,8	50,5	59,3
40	40,3	40,3	40,3	41,6	50,0
50	31,2	31,3	31,1	32,2	39,4
60	22,8	23,0	22,6	22,8	28,2
70	15,3	15,7	14,9	14,5	17,6
80	9,1	9,5	8,4	7,9	9,1

Fonte: A autora (2013).

Na Tabela 1, constam os resíduos ou erros absolutos (diferença entre expectativa de vida de cada modelo e a expectativa de vida dada pelo IBGE) em cada ponto.

A seguir, na Tabela 2, apresenta-se o erro absoluto comparando a expectativa de vida obtida pelo IBGE e a obtida pelos modelos estudados:

Tabela 2 – Resíduos estimados pelos modelos

Idade em 2011 (t)	IBGE (2011)	Erro absoluto (δ)			
		Polinômio de:		Função de Gompertz	
		grau 3 (via Excel)	grau 4 (via Excel)	(CurveExpert)	(Solução da Equação Diferencial)
0	77,7	0,8	0,9	7,1	0,0
10	69,1	0,0	0,0	4,0	3,9
20	59,4	0,1	0,1	1,0	7,6
30	49,8	0,0	0,0	0,7	9,6
40	40,3	0,0	0,0	1,3	9,7
50	31,2	0,1	0,1	0,9	8,1
60	22,8	0,2	0,2	0,1	5,4
70	15,3	0,4	0,3	0,8	2,3
80	9,1	0,3	0,8	1,2	0,0
$\sum \delta^2$		0,95	1,6	72,49	359,28

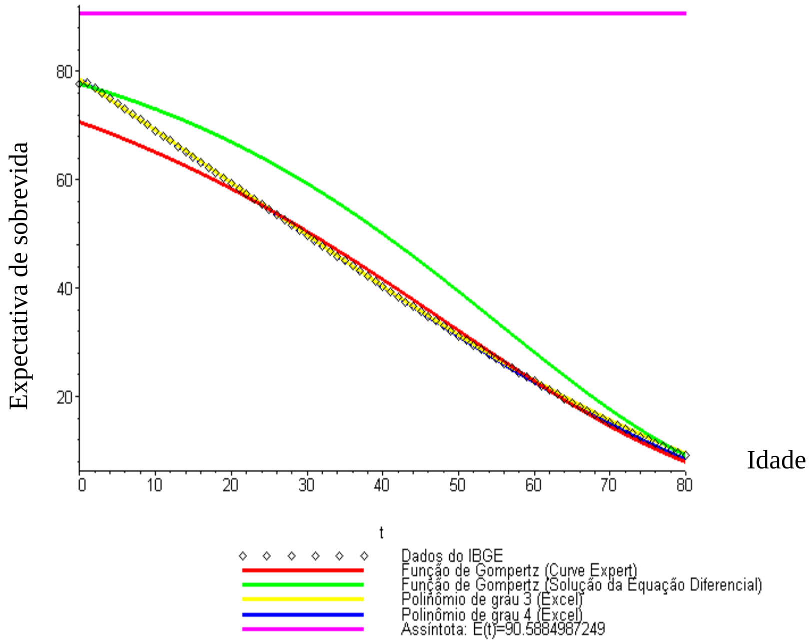
Fonte: A autora (2013).

Quanto menor for a soma do quadrado do erro absoluto (do resíduo), melhor será o modelo, segundo o critério dos mínimos quadrados.

Analisando os resultados da Tabela 2 observa-se que a menor soma é $\sum \delta^2$ = 0,95, para o modelo polinomial de grau 3.

A análise gráfica apresentada na figura a seguir reforça a escolha do modelo polinomial de grau 3 como melhor modelo matemático para descrever a expectativa de vida para brasileiros com idades até 80 anos.

Ilustração de todos os modelos estudados



Fonte: A autora (2013).

Porém, analisando a expectativa de vida para anos futuros, utilizando a Função de Gompertz através da Solução da Equação Diferencial, sugere-se algumas idades, como por exemplo, para quem nascerá em 2021, 2050, 2101 e, 2111, ou seja, 10 anos, 39 anos, 90 anos e 100 anos a mais em relação à tábua do IBGE, afim de obter-se as expectativas expressas na Tabela 3.

Tabela 3 – Estimativas futuras pela Função de Gompertz

Idade (t)	Função de Gompertz (Solução da Equação Diferencial)
Idade em 2021 (t=-10)	81,20
Idade em 2050 (t=-39)	86,95
Idade em 2101 (t=-90)	89,93
Idade em 2111 (t=-100)	90,11

Fonte: A autora (2013).

CONCLUSÃO

No desenvolvimento do processo de elaboração e de resolução do modelo, observou-se, inicialmente, que os modelos polinomiais estavam resultando em valores satisfatórios. Após avaliação dos modelos e do desenvolvimento computacional, quando comparado com estimativas futuras, concluiu-se que o modelo de Gompertz trazia melhores resultados, ainda que a soma do quadrado do resíduo não fosse mínima.

Como forma de validar o modelo, testou-se o desenvolvimento computacional de todos os modelos, referente às mulheres, e para a solução da equação diferencial ordinária em dados da forma $E(t) = ae^{-ke^{-bt}}$ .Verificou-se que, mesmo os erros absolutos não sendo os mínimos, a solução pela equação (12) apresentou um crescimento desacelerado, com uma tendência a estabilizar, fato que se verifica com a expectativa de vida.

As simulações para os anos em que não é dada a expectativa de vida pelo IBGE realizadas a partir da resolução do modelo de Gompertz indicam resultados razoáveis em relação à expectativa de vida da população brasileira.

Dois modelos foram adequados: o Polinômio de grau 3 para t E [0, 80] e o de Gompertz (solução da equação diferencial ordinária) para t E (-100, 0) e t E (80, 100).

Como sequência desse estudo, pretende-se projetar todos os dados e simulações para ambos os sexos e para os homens.

Durante o proposto estudo, verificou-se que outras variáveis também influenciariam no crescimento populacional. Assim, no processo de modelagem surge a necessidade de aperfeiçoamento do modelo, levando em consideração os parâmetros variando com o tempo. Fica como proposta de continuação deste estudo, aplicar novos modelos, tornando as aproximações da expectativa de vida menos grosseiras.

REFERÊNCIAS

ATKINSON, K. E. **An Introduction to Numerical Analysis**. 2.ed. New York: John Wiley & Sons, 1989.

BARROS, Clauber Santos. **O déficit da Previdência, desvio de recursos e os impactos sociais no processo de gestão dos fundos da seguridade social.** Âmbito Jurídico, Rio Grande, XV, n. 102, jul 2012. Disponível em: <www.ambito-juridico.com.br>. Acesso em: maio 2013.

BARROSO, Leonidas Conceição et al. **Cálculo Numérico com Aplicações**. 2.ed. São Paulo: Harbra, 1987.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002. 389 p.

BATSCHELET, E.. **Introdução à matemática para biocientistas.** São Paulo: Universidade de São Paulo, 1978.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino.** São Paulo: Contexto, 2000. 127 p.

BURDEN, Richard L., FAIRES, J. Douglas. **Análise Numérica**. São Paulo: Thomson, 2003.

CERQUEIRA, Wagner de. **O crescimento da população brasileira** 2013. Disponível em: <www.brasilescola.com/brasil/o-crescimento-da-populacao-brasileira>. Acesso em: maio de 2013.

CHAPRA, Steven C., CANALE, Raymond P. **Numerical Methods for Engineers with Programming and Software Applications**. 4.ed. Boston : McGraw-Hill, 2002.

CLÁUDIO, Dalcidio Moraes, MARINS, Jussara Maria. **Cálculo Numérico Computacional.** 2.ed. São Paulo : Atlas, 1994.

CUNHA, M.Cristina**, Métodos Numéricos,** Campinas, SP, 2003, Ed. Unicamp.

GANDER, Walter.; HREBICEK, Jiri. **Solving Problems in Scientific Computing Using Maple and Matlab**: Berlin, Springer-Verlag, 1995.

HUMES, Ana Flora P. de Castro et al. **Noções de Cálculo Numérico**. São Paulo: McGraw-Hill, 1984.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA - **Censo 2010** 2013. Disponível em: < censo2010.ibge.gov.br/coleta >. Acesso em: abril de 2013.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA - **Censo Demográfico** 2013. Disponível em: <saladeimprensa.ibge.gov.br/noticias>. Acesso em: abril de 2013.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA – **Tábua de vida.** 2013. Disponível em <www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/tabuadevida> Acesso em: março de 2013.

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL. Biblioteca Central Ir. José Otão. **Modelo para apresentação de trabalhos acadêmicos, teses e dissertações elaborado pela Biblioteca Central Irmão José Otão**. 2011. Disponível em: <www.pucrs.br/biblioteca/trabalhosacademicos>. Acesso em: março de 2013.

RICE, Richard G.; DO, Duong D. **Applied Mathematics and Modelling for Chemical Engineers.** New York : John Wiley & Sons, 1995.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes, LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. São Paulo: McGraw-Hill, 1997.

SCHELEIDER, Maria Amélia N, Cunha, Maria Cristina dC, **Métodos Numéricos para Equações Diferenciais Parciais**, Notas em Matemática Aplicada, Volume 4, São Carlos, SP, 2003, SBMAC. Disponível em <www.sbmac.org.br/boletim/pdf_2003/livro_04_2003.pdf> Acesso em: 2003.

SÓ MATEMÁTICA - **Discussões Sobre Modelagem Matemática e o Ensino-Aprendizagem** 2013. Disponível em: <www.somatematica.com.br/artigos>. Acesso em: abril de 2013.

STROUD, K.A, BOOTH, Dexter J., **Advanced Engineering Mathematics**, New York, Palgrave Macmillan, 2003.

TÉCNICAS, Associação Brasileira de Normas. **NBR 6027 Informação e documentação - Sumário – Apresentação**. Exemplar para uso exclusivo – Manoel Alves Damascena Júnior. Rio de Janeiro: Impresso no Brasil, 2010.

ZILL, Dennis G., **Equações diferenciais Com Aplicações em Modelagem**. São Paulo: Thomson, 2003.