

VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática



ULBRA - Canoas - Rio Grande do Sul - Brasil
16, 17 e 18 de outubro de 2013

Minicurso



COMPREENSÃO DE ELEMENTOS GEOMÉTRICOS À LUZ DE UMA ABORDAGEM HISTÓRICA DAS GEOMETRIAS NÃOEUCLIDIANAS ENQUANTO ANOMALIA.

Anna Karla Silva do Nascimento¹

Resumo: Este minicurso traz uma abordagem histórica da geometria euclidiana, organizada e axiomatizada por Euclides de Alexandria (300 a.C.), através de sua obra *Os Elementos* mas, nos ateremos a discussão que houve durante séculos sobre o Quinto Postulado, que depois de tantas tentativas de demonstração desse postulado, três matemáticos, Bolyai (1802-1860), Lobachevsky (1793-1856) e Gauss (1777-1855), descobriram outra geometria tão ampla e complexa quanto a primeira, a geometria nãoeuclidiana, que quebrou o paradigma da unicidade da geometria euclidiana, essa quebra de paradigma chamamos de anomalia que podemos considerar como o reconhecimento de que, de alguma maneira, a essência (ideia principal) transgrediu o que era considerado como padrão à ciência normal. O objetivo do minicurso é trabalhar com elementos básicos da geometria a partir do estudo histórico das geometrias nãoeuclidianas enquanto anomalia. A abordagem metodológica será feita através de confrontos de figuras construídas em diferentes espaços para observarem as deformações existentes.

Palavras Chaves: Anomalia. Geometria. Geometria nãoeuclidiana. História da Matemática.

1. Introdução

Esse minicurso é voltado para o ensino da geometria via anomalias existentes na matemática, tratando exclusivamente das Geometrias nãoeuclidianas tomando a euclidiana como referência. Este minicurso tem como objetivo geral trabalhar com elementos básicos da geometria a partir do estudo histórico das geometrias nãoeuclidianas enquanto anomalia (consideradas até então questões em aberto) indicando suas implicações pedagógicas através de investigações matemáticas e o uso da História como recurso pedagógico para mostrar através desta sequência de atividades as diferenças e quão amplo é o conceito de geometria e suas entidades. O conjunto de atividades assim proposto é elaborado uma carga horária de quatro horas distribuídas em dois blocos de atividades cujo público alvo são professores e alunos de graduação em matemática.

¹Mestrado. UFRN.nascimento.karla@gmail.com

No mundo da ciência as anomalias são constantes, pois ao longo dos tempos e em diferentes temas científicos sempre se pode observar quebra de paradigmas ou deformações na linha tênue do desenvolvimento. Neste sentido, são vistas anormais pelo fato de muitas vezes modificarem a essência do objeto pesquisado.

Mas, segundo Kuhn (2009, p.78), anomalia “é o reconhecimento de que, de alguma maneira, a natureza violou as expectativas paradigmáticas que governam a ciência normal².” Já de acordo com Mehrtens (2010, p.9), “as anomalias são fenômenos que não atendem as expectativas da matriz disciplinar aceita”.

Assim, a anomalia é tida como um quebra de paradigmas pelo fato de ser algo que é fora do padrão. Logo, tem-se que uma nova ideia surge conflitando com o conhecimento anterior. Vale salientar que a identificação de uma anomalia provoca um choque e, por este motivo, muitas vezes demora bastante para ser aceita pela comunidade científica em virtude do desvio do padrão normal, não por trazer uma ideia que inicialmente é tida como nova, mas porque traz um pensamento que se opõe com o anterior provocando um desequilíbrio, ou seja, uma perturbação ideológica dentro da própria comunidade, tida como crise de pensamento.

O intuito de estudar anomalias na matemática se dá pelo fato de tê-las muito próximas da ciência em geral e de que trazem muitas curiosidades e paradoxos que necessitam ser compreendidos pela comunidade científica.

A ideia da anomalia provoca, de certa forma, uma confusão na mente de quem pretende estudá-la. Por causa deste desajuste – mesmo que momentâneo – o seu estudo torna-se eficaz aos alunos devido às ações instrumentais do desenvolvimento da cognição do ser humano que são similares ao processo de assimilação e acomodação que, segundo Piaget (1969) são os agentes de equilíbrio, gerando desequilíbrios e conduzindo ao esforço de estabelecer novo equilíbrio tornando-se o autorregulador do desenvolvimento. Neste sentido, as anomalias causam um conflito cognitivo nos estudantes análogo aos entraves enfrentados pelos que se depararam com a anomalia historicamente donde o crédito para o ensino pode ser obtido com as características de sua superação.

As anomalias são uma ferramenta valiosa para o historiador na análise histórica. Por causa dessa importância histórica, decidimos verificar, através de algumas atividades, a anomalia existente na geometria nãoeuclidiana quando tomamos a euclidiana como referência

² Ciência normal, segundo Kuhn (2009, p. 29) é uma pesquisa firmemente baseada em uma ou mais realizações científicas passadas.

com o intuito de ampliarmos e/ou melhor definirmos o conceito de retas paralelas e triângulos (soma dos ângulos internos).

Trabalharemos uma abordagem histórica e investigativa fazendo com que o professor desenvolva a capacidade de indagar as questões dadas para averiguação e que tenha possibilidade de progredir com o seu raciocínio lógico-matemático ampliando, mediante confrontos, as definições dos elementos geométricos.

Sobre o uso da investigação como recurso metodológico Ponte (2009, p.13) afirma que “investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades”. Para este autor, a investigação proporciona ao aluno o desenvolvimento da curiosidade fazendo com que busque interesse sobre o surgimento do tema matemático a ser investigado.

Como as anomalias são quebras de paradigmas, fizemos o uso da investigação histórica como recurso pedagógico para que os participantes observem e tenham capacidade de verificar em que pontos os paradigmas foram quebrados, sobretudo historicamente, quando mudamos o referencial da geometria euclidiana para uma nãoeuclidiana.

O primeiro bloco é formado por quatro atividades sobre retas paralelas. Já o segundo contém cinco atividades sobre triângulos. Com isto, propõe-se fazer uma comparação das geometrias euclidianas com as nãoeuclidianas, tendo sempre como referencial a geometria euclidiana. Os objetivos específicos consistem em fazer com que os participantes dessas aulas ampliem a definição desses elementos e, conseqüentemente, o conhecimento entre eles despreendido, necessariamente, da imagem. De fato, a identificação da anomalia acarretará em deformações (visuais) das figuras, mas o conceito permanecerá o mesmo mudando apenas o referencial.

Detalharemos, a seguir, estes blocos de atividades explicitando os objetivos de cada um e o objetivo de cada atividade.

2. Bloco de Atividades Sobre as Retas Paralelas

Foi durante o período áureo da matemática grega que ela teve mais destaque no mundo e um dos que contribuíram para isto foi Euclides de Alexandria que, segundo Eves (2004), viveu por volta de 300 a.C. , publicou a obra *Os Elementos*, na qual estão várias proposições, demonstrações e axiomas da geometria que usamos até os dias de hoje. De fato, nesta obra,

Euclides esquematiza a geometria com uma estrutura lógica e um rigor muito bem elaborada sendo tal estruturação considerada muito importante para a matemática.

Vale destacar que, as demonstrações matemáticas deste período grego não eram aritmetizadas como temos atualmente, elas eram geométricas. Dentre os axiomas que estão na obra (coleção de treze livros), existe um em especial, o livro I, que foi responsável pela perturbação de vários matemáticos, pois foi muito questionado por causa da sua falta de clareza. Parecia mais um teorema que um postulado e, por isso, inúmeros matemáticos de diversas épocas queriam demonstrá-lo para que pudessem contradizer aquilo que Euclides afirmava. O responsável por toda esta discussão e que levou em torno de dois milênios para ser esclarecido foi o 5º Postulado de Euclides, também conhecido como o Postulado das Paralelas. Adiante, na atividade 1, exporemos tal postulado.

É com base neste postulado que elaboramos as atividades sobre retas paralelas deste bloco, fazendo com que o aluno possa realizar sua investigação e verificar sua veracidade para referenciais distintos.

Linhas paralelas são linhas num único plano que não convergem nem divergem, mas têm todas as perpendicularidades, desenhadas dos pontos de uma para os da outra, iguais” (Próclus, séc V, 176.5-176.11). Isto é, duas rectas são paralelas se forem equidistantes, ou seja, se a distância medida numa qualquer perpendicular de uma delas, for sempre igual, independentemente da perpendicular escolhida. (CUORE, 2011)³

Segundo a geometria euclidiana, as paralelas são retas que possuem uma mesma distância entre si e, com isto, nunca se cruzam. Ou seja, nesta geometria as retas paralelas nunca se encontram, são equidistantes. Mas será que esta afirmação serve para qualquer geometria?

Baseando-se neste questionamento construiremos retas paralelas em espaços diferentes para ver se este axioma se encaixa em todos os espaços e a partir daí analisar se existe ou não uma anomalia.

O objetivo deste bloco de atividades é levar o participante a perceber se há contradição no 5º postulado ao afirmar que duas retas são paralelas quando são equidistantes entre si à luz da geometria euclidiana e as nãoeuclidianas. Já os materiais usados para aplicação das atividades deste bloco são folhas de papel sulfite, lápis grafite, régua, compasso, esfera de isopor e setor hiperbólico de biscuit.

³ Disponível em: <<http://profracuore.blogspot.com.br/2011/04/tentativas-de-demonstracao-do-quinto.html>> Último acesso: 21 nov 2012.

Antes de cada atividade mostraremos um recorte histórico sobre cada tema escolhido para que os participantes possam tomar como base sobre o que se trata cada uma.

As três primeiras atividades deste bloco são de construções geométricas, onde é pedido para que os participantes façam a construção das retas paralelas, segundo a geometria euclidiana, em três espaços diferentes. O primeiro espaço é o euclidiano, onde serão fornecidas folhas de papel ofício para construção; na segunda serão distribuídas esferas de isopor, para constatar se existe paralelismo na geometria esférica e na terceira, serão distribuídas umas selas (paraboloides hiperbólicos) feitos de biscuit.

A quarta atividade é para analisar e perceber as similaridades e divergências que há na construção de uma reta paralela à outra quando o espaço é mudado para diferentes geometrias, observando se há a anomalia (deformação). Esta atividade fecha o bloco com uma reflexão sobre as generalizações feitas pelos professores de matemática em sala de aula, pois, muitos, não particularizam certas afirmações e de certa forma, omitem o conteúdo limitando o aprendizado do aluno.

3. Bloco de Atividades sobre Triângulos

Os triângulos são figuras geométricas que contêm três lados e, conseqüentemente, três ângulos. É o polígono convexo com o menor número de lados. Há três tipos de triângulos, o escaleno, cujos três lados são distintos; o triângulo isósceles, que possui dois lados congruentes e o triângulo equilátero que possui os três lados iguais.

Durante vários séculos, mais precisamente, desde quando o conjunto de livros organizado por Euclides de Alexandria (cerca de 300 a.C) chamado de *Os Elementos* – não se tinha conhecimento de outro espaço, além do euclidiano e, por conseqüência, da existência das entidades geométricas concebidas por Euclides em outro referencial, mas no século XVIII, depois de várias tentativas de demonstrações do 5º postulados de Euclides, três matemáticos, Bolyai (1802-1860), Lobachevsky (1793-1856) e Gauss (1777-1855) foram responsáveis por uma revolução ocorrida na matemática a partir do descobrimento das geometrias não-euclidianas.

O surgimento da Geometria não-euclidiana foi visto como um desenvolvimento revolucionário e notável ocorrido durante a primeira metade do século XIX, auto-consistente e diferente da usual geometria euclidiana.

Dentre este desenvolvimento revolucionário, foram mudadas algumas propriedades – como a da soma dos ângulos internos de um triângulo que não pode ser considerada a mesma para qualquer espaço – ou até mesmo obtidas generalizações das entidades geométricas. Acompanharemos o processo anômalo, que notadamente implica em deformações nas figuras euclidianas, mas que conserva sua definição com adaptações das propriedades. É, pois, o caso do triângulo. Isto posto, propomos generalizar a definição de triângulo para diferentes espaços e desprender tal definição da imagem. Além disso, dispomos por verificar se a soma dos seus ângulos internos é sempre 180° mesmo que mude o espaço a ser estudado, a partir disto verificaremos a quebra de paradigmas das definições de somas de triângulos do espaço euclidiano. Pois é sabido que os livros do ensino básico e superior como, Giovanni Júnior (2009), Iezzi (2009), dentre outros, generalizam a definição desta soma não revelando para que referencial isto serve, por algum motivo a generalizam.

Vamos iniciar as atividades com uma abordagem investigativa para que o aluno observe as semelhanças e divergências das construções feitas nos espaços distintos.

O objetivo deste bloco de atividades é conduzir o participante a definição geral de triângulo independente da geometria e, conseqüentemente, a ampliação do conceito e das propriedades do triângulo desprendida, necessariamente, da imagem. Através das figuras geométricas construídas em espaços distintos, eles verificarão as diferentes características das geometrias.

Os materiais necessários para as atividades são folhas de papel sulfite, lápis grafite, régua, esfera de isopor, setor hiperbólico de biscuit, régua e transferidor.

Nas três primeiras atividades deste bloco o participante marcará três pontos não colineares e em seguida ligará os mesmos, formando triângulos. Estas construções são feitas em espaços diferentes, o primeiro triângulo no espaço euclidiano, o segundo no esférico (esfera de isopor) e o último no espaço hiperbólico (sela de biscuit).

A quarta atividade conduzirá o participante a verificação das somas dos ângulos internos das figuras construídas, através de uma tabela que será preenchida com cada ângulo de cada triângulo construído. É estudado no ensino básico que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer mede 180° , como afirmam os livros do Iezzi (2009) e do Giovanni Júnior (2009). Tomando esta afirmação como parâmetro, vamos averiguar se esta propriedade da soma dos ângulos internos serve para qualquer espaço. Esta verificação será feita com a utilização de um transferidor de plástico maleável que permite a medição dos ângulos sem dificuldade.

Já a quinta atividade foi desenvolvida para analisar e perceber as similaridades e divergências que há na construção de um triângulo quando o espaço é mudado, observando a anomalia existente quando o referencial é o espaço euclidiano e fazendo com que obtenha um conceito geral independente do espaço, e desligando-o, necessariamente, da imagem.

Ao término das atividades esperamos ter contribuído para que os participantes do minicurso tenham compreendido o que são as anomalias na matemática, ampliado sua definição sobre os elementos estudados e, conseqüentemente, o conhecimento entre eles desprendido, necessariamente, da imagem.

4. Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais : matemática /Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997.

CAMARGO, Keilla Cristina Arsie. **A Expressão Gráfica e o Ensino das Geometrias Não Euclidianas**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná: Curitiba, 2012.

CUORE, Raul Enrique. **A Demonstração do Quinto Postulado de Euclides** Postulado das Paralelas. Disponível em:
<<http://profraulcuore.blogspot.com.br/2011/04/tentativas-de-demonstracao-do-quinto.html>> Último acesso: 21 nov 2012.

ESFERA. Disponível em < www.google.com.br >. Último acesso: 15 mar 2012.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução: Irineu Bicudo. São Paulo: Unesp, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A Conquista da Matemática**. São Paulo: FTD, 2009.

IEZZI, Gelson. **Matemática e Realidade**. São Paulo: Atual, 2009.

KUHN, Thomas S. **A estrutura das revoluções científicas**. São Paulo: Perspectiva, 2009.

MEHRTENS, Herbert. *As teorias de T. S. Kuhn e a matemática: um ensaio discuciente da "nova historiografia" da matemática*. Disponível em: <<http://www.scribd.com/doc/36192445/MEHRTENS-As-teorias-de-T-S-Kuhn-e-a-matematica-um-ensaio-discuciente-da-nova-historiografia-da-matematica>>. Acesso em: 29 out 2010.

PIAGET, Jean. **O Estruturalismo**. Tradução: Moacir Renato de Amorim. São Paulo: Difel, 1969.

PONTE, João Pedro da. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

QUEIROZ, Flávia Cristina Martins. SANTOS, Patrícia Borges dos. AUGUSTINI, Edson. **Tópicos de Geometria Hiperbólica**. III Bienal da SBM - IME/UFG – 2006.

SEARA DA CIÊNCIA. *As Geometrias Não-euclidianas. O disco de Poincaré e as gravuras de Escher*. Seara da ciência. Disponível em: <<http://www.searadaciencia.ufc.br/donafifi/hiperbolica/hiperbolica6.htm>>. Último acesso: 13 dez 2012.