VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática
ULBRA - Canoas - Rio Grande do Sul - Brasil
16, 17 e 18 de outubro de 2013
Comunicação Científica

INTERPRETANDO GRÁFICOS DE SOLUÇÕES DE UM MODELO MATEMÁTICO

Débora da Silva Soares[1]

Modelagem Matemática

Resumo: Nesse artigo trago alguns indícios que apontam para a complexidade envolvida na compreensão e interpretação de um modelo matemático para um fenômeno biológico e o estudo do comportamento de suas soluções. Esses índicos provêm dos dados construídos em uma pesquisa que desenvolvi nos últimos quatro anos (SOARES, 2012), cujo objetivo era analisar qual(is) o(s) papel(éis) de um software no desenvolvimento de uma abordagem pedagógica baseada na Análise de Modelos elaborada para a disciplina Matemática Aplicada de um curso de graduação em Biologia. Os indícios apontam para pelo menos três processos vinculados à interpretação dos gráficos: a identificação de convenções; a descrição do comportamento das soluções; e a busca de justificativas para esses comportamentos em termos do fenômeno. Esses processos corroboram com apontamentos feitos por autores como Friel et al. (2001).
Palavras Chaves: Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Tecnologias Digitais. Modelagem Matemática. Biologia.

INTRODUÇÃO

Nos últimos quatro anos desenvolvi uma pesquisa[2] (SOARES, 2012) cuja base foi uma abordagem pedagógica elaborada para a disciplina Matemática Aplicada, única disciplina de Matemática obrigatória na grade curricular do curso de graduação em Biologia da Unesp, Rio Claro, SP. Ela pode ser pensada como um disciplina de Cálculo Dierencial e Integral I (CDI), pois sua ementa inclui o estudo de funções, noções de limites, derivadas e integrais, e suas aplicações, porém com carga horária de 4 horas semanais.

A abordagem pedagógica teve como objetivo principal criar um ambiente onde os estudantes pudessem refletir sobre a Matemática de forma relacionada à sua área de interesse. Para isso, propuz aos estudantes a análise de um modelo matemático para um fenômeno biológico desde o início do semestre. Essa análise procurou ser realizada de forma integrada com a discussão de alguns dos conceitos matemáticos previstos na ementa da disciplina.

[1] Doutora em Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Unesp, Rio Claro, SP. Membro do GPIMEM – Grupo de Pesquisa em Informática outras Mídias e Educação Matemática. Email: debbie_mat@yahoo.com.br

[2] Pesquisa de doutorado desenvolvida junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Unesp, Rio Claro, SP, sob orientação do Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba e com apoio financeiro da Capes.

A pesquisa teve como objetivo analisar o(s) papel(éis) do software Modellus, com o qual os estudantes trabalharam durante o semestre, no desenvolvimento da abordagem. Nesse artigo, entretanto, meu foco é diferente: a partir de um extrato de um dos diálogos desenvolvidos por uma das duplas de estudantes discuto alguns elementos que se mostraram presentes no processo de análise e interpretação dos gráficos das soluções do modelo matemático e que dão indícios da complexidade envolvida nessa atividade.

ANÁLISE DE MODELOS E A ABORDAGEM PEDAGÓGICA

Conforme mencionei na introdução, a abordagem pedagógica tem como ideia central propor que os estudantes analisem um modelo matemático já existente para um determinado fenômeno biológico desde o primeiro dia de aula. O fenômeno escolhido foi a transmissão da malária, doença com prevalência elevada em várias partes do mundo, em particular na região norte do Brasil, e que é transmitida pela picada de fêmeas do mosquito do gênero *Anopheles*.

Um dos primeiros modelos elaborados para o estudo desse fenômeno é o modelo de Ross-Macdonald. Ele é composto por um sistema de duas equações diferenciais ordinárias (EDO) não lineares. Foi esse o modelo escolhido para trabalhar com os estudantes da Biologia. Uma série de simplificações embasam esse modelo, o que gerou espaço para debate junto aos estudantes com relação à adequabilidade do modelo e suas limitações. Dentre essas simplificações, destaco as seguintes: o período de incubação dos parasitas no ser humano é desconsiderado; a aquisição gradual de imunidade pelas pessoas é ignorada; a mortalidade de humanos também é desconsiderada; os mosquitos uma vez infectados continuam assim até sua morte (BASAÑEZ; RODRÍGUEZ, 2004).

O modelo possui duas variáveis principais: *X(t)* que informa a quantidade de pessoas infectadas por malária na região estudada em cada instante de tempo; *Y(t)* que informa a quantidade de mosquitos infectados pelo parasita na região em cada instante de tempo. Essas variáveis são relacionadas por meio das equações a seguir, que procuram descrever como cada uma das populações de pessoas e mosquitos infectados evolui ao longo do tempo.

$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{a}{N} \cdot p\right) \cdot Y \cdot (M - X) - g \cdot X$$

$$\frac{dY}{dt} = \left(\frac{a}{N} \cdot c\right) \cdot X \cdot (N - Y) - v \cdot Y$$

Grosso modo podemos interpretar essas equações da seguinte maneira: A primeira equação informa que a população de pessoas infectadas (X) aumenta conforme pessoas saudáveis (M-X) são picadas por mosquitos infectados (Y) e diminui conforme pessoas infectadas (X) se recuperam de acordo com uma taxa de recuperação (g). A "chance" de uma picada gerar uma infecção em um ser humano é dada pelo conjunto de parâmetros ap/N. Já a segunda equação informa que a população de mosquitos infectados aumenta conforme mosquitos não infectados (N-Y) picam pessoas infectadas (X) e diminui conforme mosquitos infectados (Y) morrem segundo uma taxa de mortalidade (v). De forma semelhante, a "chance" de uma picada infectar um mosquito é dada pelo parâmetro ac/N.

Para guiar a análise do modelo pelos estudantes, assim como sua reflexão a respeito dos conceitos matemáticos relacionados, elaborei um conjunto de atividades. A análise proposta nessas atividades é de caráter qualitativo, isto é, seu foco não é a obtenção de representações analíticas para as soluções do modelo, mas sim o entendimento das equações em termos do fenômeno e a análise do comportamento de suas soluções. As soluções do sistema de Ross-Macdonald são as funções $X(t)$ e $Y(t)$ que, quando substituídas nas equações juntamente com suas derivadas, fazem com que as equações sejam satisfeitas.

Para acessar as soluções do modelo, os estudantes trabalharam durante todo o semestre com o software Modellus[3] (versão 4.01), um software gratuito desenvolvido pelo professor Vitor Duarte Teodoro da Universidade Nova de Lisboa e seus colaboradores. O Modellus permite o trabalho com modelos matemáticos que envolvem funções, iterações, equações a diferenças finitas e EDO. A Figura 1 a seguir apresenta uma tela do software.

Como é possível ver pela imagem, o software permite a configuração da variável independente e de valores para os parâmetros e para as condições iniciais do modelo. Além disso, ele fornece representações gráficas e tabulares para suas soluções. Na Figura 1 é possível ver o gráfico de $X(t)$ para três casos (gerados a partir da definição de três valores distintos para um dos parâmetros) simultaneamente. Esse recurso permite a comparação do comportamento das soluções do modelo de acordo com os valores assumidos pelos parâmetros, atividade bastante importante no estudo de modelos matemáticos.

Esse foi o objetivo de uma das atividades propostas aos estudantes, a qual será foco de discussão nesse artigo. No total foram nove atividades que orientaram o trabalho dos estudantes na discussão de conceitos como funções, noções de limites, derivada, reta tangente

[3] Website: <http://www.modellus.fct.unl.pt/> Acesso em: 9 Abr. 2013.

e sua inclinação, pontos de máximo e mínimo, além da análise de comportamento das soluções[4].

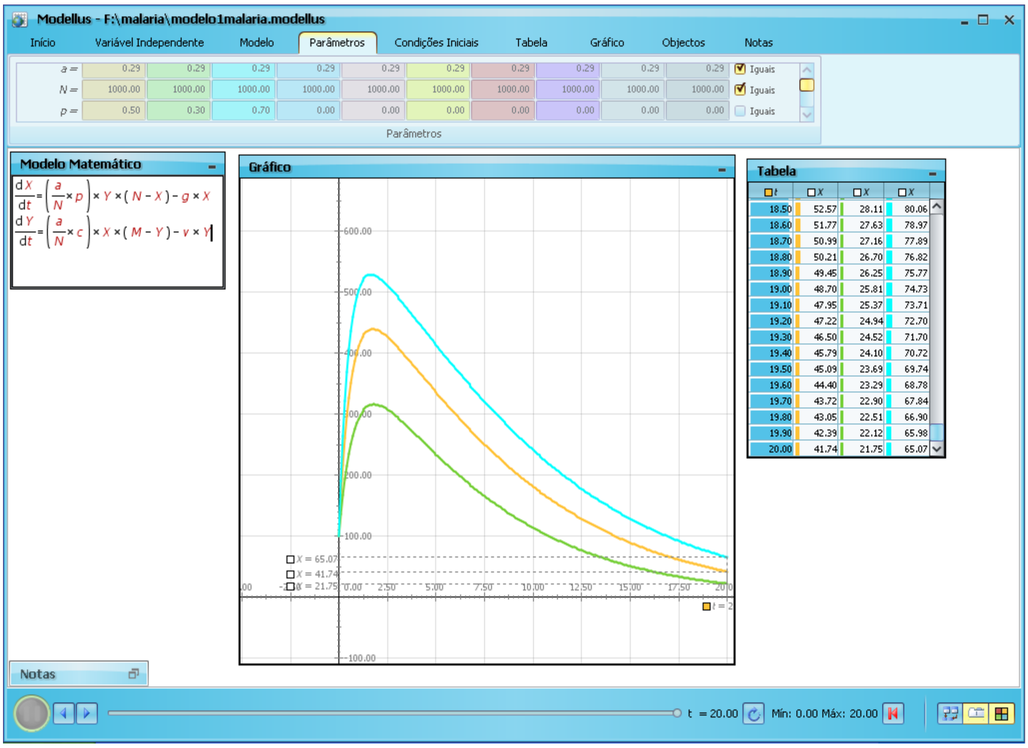

Figura 1 - Interface do software Modellus.

É interessante observar que no trabalho proposto na abordagem pedagógica, os estudantes não elaboram seu próprio modelo, mas analisam um modelo já existente para o fenômeno biológico. Essa é uma característica que distingue a abordagem aqui proposta dos trabalhos vinculados à Modelagem Matemática como abordagem pedagógica, nos quais os estudantes elaboram um modelo para o problema com o qual estão trabalhando. Nesse sentido, propuz a terminologia Análise de Modelos (SOARES, 2012; JAVARONI, SOARES, 2012) como forma de referenciar abordagens que, de forma geral, propõem o estudo de modelos já existentes como maneira de discutir e introduzir conteúdos matemáticos novos para os alunos[5].

O intuito dessa terminologia não é segregar abordagens como a proposta em Soares (2012) dos trabalhos de Modelagem Matemática, até porque acredito que esses dois modos de trabalhar com modelos matemáticos em sala de aula podem ser articulados. Por outro lado, como apontamos em Soares e Javaroni (2013), ainda não ouso dizer que abordagens baseadas

[4] Para mais detalhes sobre as atividades, por favor, veja Soares (2012) e Borba e Soares (2012).
[5] Javaroni (2007) e Deprez (2011) trazem exemplos de abordagens que eu entendo como também vinculadas à Análise de Modelos.

na Análise de Modelos podem ser entendidas como Modelagem Matemática, pois acredito que uma reflexão mais profunda sobre o assunto precisa ser desenvolvida.

Em Javaroni e Soares (2012, p.271) apontamos as seguintes atividades como passíveis de fazer parte de um trabalho com Análise de Modelos:

> (i) estudo do fenômeno em questão; (ii) estudo das hipóteses consideradas para a elaboração do modelo; (iii) entendimento do que cada termo do modelo diz sobre o fenômeno; (iv) estudo do comportamento da(s) solução(ões) do modelo, relacionando esse comportamento com o fenômeno e com as hipóteses consideradas; (v) estudo da influência dos parâmetros do modelo no comportamento de suas(s) solução(ões), o que permite fazer previsões e analisar a influência de possíveis intervenções no fenômeno; (vi) análise das limitações do modelo.

Conforme podemos perceber por essas atividades, há uma ênfase forte na interpretação e compreensão do modelo e de suas soluções no trabalho com Análise de Modelos. Em princípio pode-se pensar que isso é uma tarefa simples. Entretanto os diálogos desenvolvidos pelos estudantes de Biologia durante a análise do modelo de Ross-Macdonald, apresentam indícios da complexidade envolvida nesse processo. São alguns desses indícios que me proponho a discutir a seguir. Antes, porém, apresentarei alguns aspectos metodológicos da pesquisa.

ALGUNS ASPECTOS METODOLÓGICOS

Essa pesquisa caracteriza-se por seguir um paradigma qualitativo, na medida em que se quis compreender o(s) papel(éis) do software Modellus no desenvolvimento da abordagem pedagógica em suas várias dimensões (LICOLN; GUBA, 1985). Nesse sentido, mantendo-se a coerência, optei pela construção de dados qualitativos no ambiente natural, isto é, em uma turma regular da disciplina. Várias fontes de dados foram utilizadas, mas duas mostraram-se as mais importantes para a busca de indícios de resposta para a pergunta de pesquisa: os vídeos gerados pelo software Camtasia Studio contendo todos os movimentos feitos pelos alunos no computador e o seu diálogo; e as entrevistas feitas com duplas de alunos voluntários ao final do semestre. Além dessas fontes de dados, as notas de campo e os relatórios escritos pelas duplas sobre cada atividade realizada, também foram de relevância. A análise de diferentes fontes de dados permitiu realizar uma triangulação de dados (LINCOLN; GUBA, 1985; ARAÚJO, BORBA, 2004), onde uma articulação entre as ideias emergentes da análise de cada tipo de dado foi sendo tecida.

Tendo em vista que a elaboração da abordagem pedagógica permeou e serviu de base para a pesquisa, considero-a inspirada no *design research* (pesquisa projeto) (DOERR;

WOOD, 2006). Uma das principais características desse tipo de pesquisa é a elaboração de um produto e a necessidade de vários ciclos de análise para o seu aprimoramento. A abordagem pedagógica que desenvolvi passou por três ciclos de análise com o intuito de aprimorá-la: i) projeto piloto, desenvolvido com uma dupla de alunos; ii) primeira aplicação em uma turma regular da disciplina no segundo semestre de 2010; iii) e segunda aplicação em outra turma regular da disciplina no primeiro semestre de 2011.

Os dados apresentados e discutidos nesse texto são os provenientes da segunda aplicação, isto é, da turma regular do primeiro semestre de 2011. Essa turma era do curso noturno e era composta por 22 estudantes. Os momentos de trabalho com o modelo matemático ocorreram em um laboratório de informática do grupo de pesquisa que participo (GPIMEM – Grupo de Pesquisa em Informática outras Mídias e Educação Matemática), com computadores contendo o software Modellus (versão 4.01).

INTERPRETANDO OS GRÁFICOS DAS SOLUÇÕES DO MODELO

Uma das atividades propostas aos estudantes teve como objetivo incentivá-los a estudar o comportamento das soluções do modelo de Ross-Macdonald, assim como analisar a influência dos parâmetros do modelo nesse comportamento. Para isso, algumas situações foram elaboradas sugerindo a mudança de valores de um determinado parâmetro. Modificar os valores dos parâmetros significa mudar as condições de ocorrência da transmissão da malária.

Uma das possibilidades oferecidas pelo *Modellus* é visualizar vários gráficos simultaneamente no mesmo sistema de eixos, como explicitei anteriormente. Essa possibilidade permite a realização de uma análise como a sugerida acima, o que é de fato bastante importante tendo em vista que as diferentes condições de ocorrência de um fenômeno são foco de estudo biológico. Conforme comentei em Soares (2013), essa possibilidade ofertada pelo software é um dos fatores que nos permite pensá-lo como um *laboratório digital*.

A situação a seguir foi uma das propostas aos estudantes para análise:

> A probabilidade de um mosquito *anofelino* ser infectado pelo parasita malário depende da espécie do mosquito e da cepa do plasmódio. Suponha que tenhamos três diferentes espécies de anofelinos e através de experimentos laboratoriais verificamos que a probabilidade de infecção relativa ao Plasmodium *vivax* é dada pelos seguintes valores: $c=0.01$ caracterizando a primeira espécie como refratária; $c=0.1$ caracterizando a segunda espécie como suscetível à infecção; e $c=0.9$ caracterizando a terceira espécie como altamente suscetível à infecção. Compare os gráficos *X*x*t* para os três casos e descreva como este parâmetro influencia as soluções

do modelo e relacione com o fenômeno em estudo. Analise também os gráficos *Y* x *t* (SOARES, 2012, p.306).

A figura a seguir (Fig.2) aprensenta os gráficos fornecidos pelo software construídos pelos estudantes a partir da situação proposta. Foi com base na análise desses gráficos que a dupla Priscilla e Kauã desenvolveu o diálogo que segue.

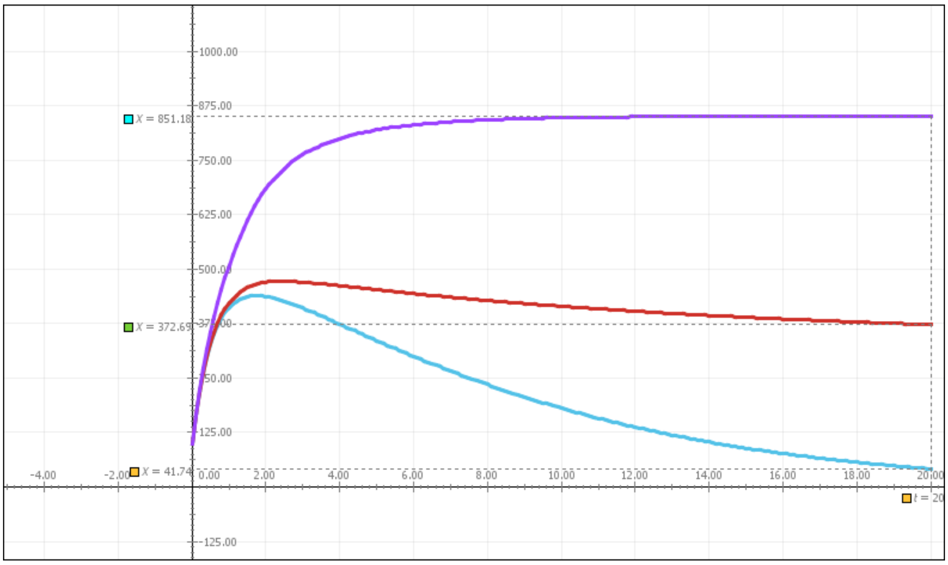

Figura 2 - Gráficos de *X(t)* para três casos distintos gerados pelo Modellus.
Curva azul - *c=0.01*; curva vermelha - *c=0.1*; curva roxa - *c=0.9*.

Priscilla: Qual era mesmo o ... o zero um [0.1], zero nove [0.9]...

Kauã: Esse é o zero um... não, esse é o zero zero um [0.01], esse é o zero um [0.1] e esse é o zero nove [0.9]. Porque... O que significa... Porque como esse aqui... a taxa de infecção dele é muito pequena, ãh...

Priscilla: Ah, assim...

Kauã: Tipo, como eles [os mosquitos] vão morrendo e vão nascendo saudáveis, e poucos vão se infectando... entendeu? Tipo, como é que a gente pode explicar isso?

Inicialmente, Kauã e Priscilla identificam qual gráfico corresponde a qual valor do parâmetro *c*. Em seguida, Kauã já procura justificar em termos do fenômeno biológico o comportamento observado nos gráficos. Ele manifesta dificuldade para elaborar seu raciocínio, mas elenca uma fator fundamental para o entendimento do comportamento apresentado pelo modelo: a hipótese de que uma vez infectado o mosquito assim permanece até sua morte. Ele também destaca outro fator: os mosquitos nascem “saudáveis”, isto é, eles só se infectam ao picar uma pessoa que esteja infectada pelo parasita, fato intrínseco à dinâmica de transmissão da doença. O diálogo continua:

Priscilla: Ah, é o que ela tá falando, tipo... altamente suscetível.

Kauã: É, mas aqui é a quantidade da população que está sendo infectada. Então peraí, a gente tá no número de pessoas... infectadas. X *é a população de pessoas infectadas...*

Priscilla: Aqui não é o tempo?

Kauã: É, ao longo do tempo. A quantidade de pessoas infectadas ao longo do tempo, entendeu? Aí tá assim, tipo, é que na fórmula a gente coloca a... as, as...

Priscilla: Não é mosquito não?

Kauã: Aqui? Não, aqui continua sendo a população, a... a população.

Priscilla: Ah tá.

...

Priscilla sugere que o próprio enunciado da questão já justificaria o comportamento de um dos gráficos (provavelmente ela se refere ao gráfico roxo): "é altamente suscetível". Quer dizer, já que o mosquito é altamente suscetível a ser infectado pelo parasita, é esperado que a população de mosquitos infectados aumente. Porém, Kauã chama a atenção para o fato de que os gráficos são da função *X(t)*, que indica a quantidade de pessoas infectadas. Priscilla confirma com o colega que informações estão sendo representadas em cada eixo do sistema cartesiano. Os estudantes continuam seu diálogo:

Priscilla: A população não é humana?

Kauã: É, então, é porque assim, tipo... Essa é a população de pessoas, população de pessoas infectadas aqui no caso, mas com esse mosquito tende a diminuir por quê? Porque esse mosquito vai se infectando muito pouco... e vai ficando... tipo, pelo... eles vão morrendo quando são infectados e nascem saudáveis, e como é muito pequena a taxa de... a taxa de mortalidade, a taxa de infecção deles, a população [de humanos] infectada vai diminuindo também. E inicialmente tem um aumento, que aí eu não... deixa eu tentar pensar porque tem esse aumento. Por que tem esse aumento?

Kauã consegue articular um raciocínio que explica o comportamento do gráfico azul, quando o parâmetro *c=0.01*, ou seja, a probabilidade de o mosquito se infectar ao picar uma pessoa é *0.01*. Ele articula três tipos de informações: a hipótese do modelo mencionada anteriormente; o mecanismo de transmissão da doença; e as informações passadas pelo gráfico. Com base nessa articulação ele constrói uma linha de argumentação que parece razoável para justificar o comportamento decrescente do gráfico azul. Entretanto, Kauã percebe que o gráfico azul possui um crescimento inicial. Como justificar esse crescimento é a pergunta que segue. Na continuação desse diálogo os estudantes irão refletir sobre a mesma. Para nós, o trecho até aqui exposto nos serve como base para a discussão de algumas ideias.

DISCUSSÃO

O trecho apresentado na seção anterior, ilustra os diálogos desenvolvidos pelos estudantes com base nas situações propostas a eles envolvendo a modificação de parâmetros do modelo e sua influência no comportamento de suas soluções. Claramente, cada dupla seguiu sua própria linha de raciocínio, porém alguns aspectos que irei destacar a partir do diálogo de Kauã e Priscilla também puderam ser observados no diálogo de outros estudantes.

A análise desses diálogos permitiu observar três processos envolvidos na interpretação dos gráficos das soluções do modelo pelos estudantes. Esses processos ocorreram de formas, intensidades e ordenamento diferentes com cada dupla, mas em geral eles estiveram presentes. O primeiro deles é a identificação de convenções, isto é, identificar qual gráfico corresponde a qual valor do parâmetro ou então identificar qual variável está representada em cada eixo do plano cartesiano. No diálogo de Kauã e Priscilla pudemos encontrar esses dois tipos de identificação, como podemos observar nos dois primeiros trechos transcritos acima.

Um segundo processo foi o de descrever o comportamento da curva. Alguns estudantes verbalizaram o comportamento desde o início do diálogo, procurando compreender o modo como a quantidade de pessoas infectadas evoluía ao longo do tempo. No caso de Kauã e Priscilla, essa verbalização quase não aparece. É possível ver que Kauã descreve verbalmente a curva apenas no final: “[...] a população [de humanos] infectada vai diminuindo também. E inicialmente tem um aumento[...].” Entretanto, ele observa desde o início o comportamento da curva dado pelo software, uma vez que já procura justificá-lo logo que identifica os gráficos.

Esse “procurar justificar o comportamento” é o terceiro processo. É importante observar que nem sempre encontrar uma justificativa biológia para o comportamento das soluções mostrou-se uma tarefa simples para os estudantes. Conforme é possível observar no diálogo de Kauã e Priscilla, uma série de informações precisaram ser articuladas para que fosse possível elaborar uma justificativa razoável. Em particular, destaco as seguintes fontes de informações que se mostraram presentes nos raciocínios desenvolvidos pelos estudantes: “o significado das variáveis, o significado dos parâmetros, as hipóteses do modelo, e o próprio conhecimento dos alunos sobre o fenômeno” (SOARES, 2012, p.186).

É interessante observar que algumas vezes os estudantes experimentaram conflitos entre seu conhecimento sobre o fenômeno e as hipóteses do modelo. Ou seja, o comportamento das soluções apresentado pelo software algumas vezes não era o esperado pelos estudantes. Nesse sentido, as hipóteses assumidas pelo modelo possuem um papel fundamental no entendimento desses comportamentos. Se elas não são agenciadas, as informações apresentadas pelo modelo podem ficar sem sentido, de modo que é importante orientar os estudantes para lembrá-las e analisá-las com cuidado.

No exemplo apresentado nesse artigo, observar que os mosquitos uma vez infectados permenecem assim até sua morte e que, ao nascer, eles não estão infectados, é fundamental para compreender o comportamento dos gráficos de *X(t)* conforme varia *c*, informações que vêm das hipóteses do modelo de Ross-Macdonald.

Os processos identificados durante a interpretação dos gráficos pelos estudantes podem ser relacionados, de certa forma, com as observações feitas por Friel et al. (2001) a partir do estudo de pesquisas abordando esse tema. Os autores fazem a seguinte observação:

> Embora os pesquisadores citados nesse artigo sejam de diferentes disciplinas e usaram terminologias diferentes, existem similaridades em sua visão sobre a compreensão de gráficos. Nós identificamos três componentes principais na compreensão dos gráficos; esses componentes mostram uma progressão na atenção de características locais para características globais de um gráfico: (a) Para ler informações diretamente de um gráfico, o indivíduo precisa compreender as convenções do gráfico (e.g. Kosslyn, 1994); (b) para manipular a informação lida a partir do gráfico, o indivíduo faz comparações e realiza cálculos; e (c) para generalizar, predizer ou identificar tendências, o indivíduo deve relacionar a informação no gráfico com o contexto da situação. (FRIEL et al., 2001, p.152, tradução nossa).

Os três componentes apresentados por Friel et al. (2001) de certa forma correspondem aos três processos identificados por mim nos diálogos dos estudantes com base nas atividades de análise do modelo de Ross-Macdonald. A única diferença é que para manipular as informações lidas a partir dos gráficos das soluções do modelo, os estudantes não fizeram cálculos, mas compararam os diferentes gráficos obtidos de acordo com os valores de cada parâmetro. É interessante observar que, apesar dos componentes indicados pelos autores estarem relacionados a gráficos estatísticos, eles também se fizeram perceber na interpretação dos gráficos de funções, soluções do modelo de Ross-Macdonald, pelos estudantes.

Esses três processos identificados nos diálogos dos estudantes envolvendo a interpretação dos gráficos das soluções do modelo não têm a pretenção de ser exaustivos no sentido de caracterizá-la completamente. Entretanto eles podem dar uma dimensão da complexidade aí envolvida. De fato, a interpretação dos gráficos realizada pelos estudantes de

Biologia não pode ser considerada algo trivial, ainda mais que as informações fornecidas pelo modelo matemático e por suas soluções são de naturezas diferentes: enquanto as equações do modelo fornecem informações de variação, suas soluções dão resultados sobre quantidade. Nesse sentido, compreender o fenômeno biológico do modo como ele é exposto pelo modelo necessita uma articulação, também, entre esses diferentes tipos de informações sobre o fenômeno.

Kaiser (2007, apud Klymchuk et al., 2011) indica como uma das competências de modelagem relacionar os dados matemáticos obtidos com a situação real e interpretá-los nesse contexto. Sem dúvida essa competência de modelagem foi fortemente trabalhada com os estudantes de Biologia por meio das atividades baseadas na Análise de Modelos, uma vez que todas as atividades propostas a eles necessitaram, com mais ou menos intensidade, a compreensão dos dados obtidos a partir do modelo e sua interpretação com relação ao fenômeno de transmissão da malária. Os indícios apresentados nesse artigo nos sugerem o quanto é importante estarmos atentos, enquanto professores, na orientação dos estudantes com relação a essa interpretação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo Pesquisas Coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.) *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BASAÑEZ, M.-G.; RODRÍGUEZ, D. J. Dinámica de transmisión y modelos matemáticos en enfermedades transmitidas por vectores. *Entomotropica*, v.19, n.3, p.113-134, 2004.

BORBA, M. C.; SOARES, D. S. Modeling in Brazil: a case involving Biology. In: BLUM, W.; FERRI, R. B.; MAAβ, K. (Eds.) *Mathematikunterricht im Komtext von Realität, Kultur und Lehrerprofessionalität*. Berlim: Springer, 2012. p.53-61.

DEPREZ, J. Modelling the Evolution of Belgian Population using Matrices, Eigenvalues and Eigenvectors. In: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B. (Eds.) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling – ICTMA 14.* New York: Springer, 2011. p.467-478.

DOERR, H.; WOOD, T. Pesquisa-Projeto (*design research*): aprendendo a ensinar Matemática. In: BORBA, M. C. (Org.) *Tendências Internacionais em Formação de Professores de Matemática*. (Coleção Tendências em Educação Matemática). Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p.113-130.

FRIEL, S. N.; CURCIO, F. R.; BRIGHT, G. W. Making Sense of Graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, v.32, n.2, p.124-158, 2001.

KLYMCHUK, S.; NARAYANAN, A.; GRUENWALD, N.; SAUERBIER, G.; ZVERKOVA, T. Modelling of Infectious Disease with Biomathematics: implications for teaching and research. In: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B. (Eds.) *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling – ICTMA 14.* New York: Springer, 2011. p.489-498.

JAVARONI, S. L. *Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias.* 2007. 231f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2007.

JAVARONI, S. L.; SOARES, D. S. Modelagem Matemática e Análise de Modelos Matemáticos na Educação Matemática. *Acta Scientiae*, v.14, n.2, p.260-275, 2012.

LINCOLN, Y. S.; GUBA, E. G. *Naturalistic Inquiry*. Newbury Park: Sage Publications, 1985.

SOARES, D. S. *Uma Abordagem Pedagógica Baseada na Análise de Modelos para Alunos de Biologia: qual o papel do software?* 2012. 341f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2012.

SOARES, D. S. O papel de um software no estudo da influência das condições de ocorrência de um fenômeno biológico em sua evolução. In: *Conferência GPIMEM: 20 anos – Tecnologias Digitais em Educação Matemática*, 16, 2013, Rio Claro. Anais... Rio Claro, 2013. p.1-10. Disponível em: < https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnxncGltZW0yMGFub3N8Z3g6OTM0NWI1Njg0NWU2MmQ4> Acesso em: 16 abr. 2013.

SOARES, D. S.; JAVARONI, S. L. Análise de Modelos: possibilidades de trabalho com Modelos Matemáticos em sala de aula. In: BORBA, M. C.; CHIARI, A. (Orgs.) *Tecnologias Digitais e Educação Matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013. p.195-219.