CONCEITOS EM AÇÃO MOBILIZADOS POR ESTUDANTES EM PROBLEMAS DE DIVISÃO DE NATURAIS POR FRAÇÕES

Marli Schmitt Zanella[1]

Idelmar André Zanella[2]

Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

Resumo: Este trabalho é um ensaio teórico sobre as estruturas multiplicativas de racionais na representação fracionária, que teve como fundamentação teórica a Teoria dos Campos Conceituais (TCC). Objetivamos identificar elementos da TCC – Situações, Invariantes e Representações, mediante releitura do artigo “Children’s sense of division of fractions” de Bulgar (2003), que apresentou atividades envolvendo divisão de naturais por frações, com materiais manipuláveis. Para a estrutura multiplicativa foram identificadas situações problemas de isomorfismo de medidas, em que os estudantes desenvolveram conceitos em ação pertinentes, tais como: justificativa envolvendo números naturais, medida e a representação fracionária. A identificação desses elementos da TCC, no campo conceitual multiplicativo poderá auxiliar professores na escolha de atividades para a formação e desenvolvimento dos conceitos envolvidos nessas estruturas de racionais na representação fracionária.

Palavras-chave: Estruturas Multiplicativas. Conceito em ação. Números Racionais na Representação Fracionária.

Introdução

Neste trabalho, objetivamos investigar por meio da pesquisa bibliográfica a presença de elementos da Teoria dos Campos Conceituais – TCC, tais como situações, invariantes e representações mobilizados por estudantes do Ensino Fundamental – anos iniciais em situações problemas da estrutura multiplicativa.

[1] Mestre em Educação para a Ciência e a Matemática. Doutoranda em Educação para a Ciência e a Matemática. Universidade Estadual de Maringá - UEM. marlischmitt@hotmail.com

[2] Mestre em Matemática. Universidade Estadual de Londrina – UEL. Professor da Educação Básica do Estado do Paraná. andrezanel@yahoo.com.br

O estudo ocorreu mediante releitura na pesquisa de Bulgar (2003), que realizou atividades com estudantes de 4ª série/5º ano do Ensino Fundamental sobre as estruturas multiplicativas de números racionais em sua representação fracionária, em que explicitou o diálogo entre alunos e suas estratégias de resolução.

A pesquisa bibliográfica, que culminou na seleção do artigo de Bulgar (2003), ocorreu por meio dos periódicos disponibilizados no Portal CAPES, entre novembro/2011 e março/2012, na área de Educação, nível A1.

A Teoria dos Campos Conceituais

A TCC proporciona o estudo das ações dos alunos e as condições de produção, registro e comunicação durante situações de aprendizagem. Proporciona ao professor uma compreensão das ações do estudante, fornecendo subsídios para a organização dos conteúdos em sala de aula, de modo a privilegiar uma diversidade de situações problemas relacionadas ao mesmo conceito.

Para Vergnaud (1993, p.1) a TCC preocupa-se com a formação e o desenvolvimento de conceitos, visto que é "[...] uma teoria psicológica do conceito, ou melhor, da conceitualização do real, que permite situar e estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos, do ponto de vista de seu conteúdo conceitual".

Para Vergnaud (2009b) a formação e o desenvolvimento de um conhecimento conceitual devem emergir a partir de situações problemas que levem em consideração: a representação e o conceito e, os invariantes operatórios (conceitos e teoremas em ação) na situação problema.

Para estudar a formação e o desenvolvimento de um conceito durante a aprendizagem dos educandos Vergnaud (1993) ressalta a importância de considerarmos o conceito formado por uma terna de conjuntos (*S, I, Y*), a saber:

> *S* conjunto das situações que dão sentido ao conceito (referência). *I* conjunto dos invariantes em que se baseia a operacionalidade dos esquemas (significado). *Y* conjunto das formas de linguagem (ou não) que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (significante) (VERGNAUD, p.8, 1993).

Para a TCC as situações, os invariantes e as representações são conjuntos indissociáveis para estudar o desenvolvimento e o funcionamento de um conceito durante os processos de ensino e aprendizagem. Entretanto, não podemos afirmar que há uma bijeção entre tais conjuntos, ou seja, não se pode reduzir o significado ao significante, nem às situações, e vice-versa. Deste modo, há um estreito laço entre situação e conceito, de modo que um conceito não assume o seu significado numa única classe de situações e que uma situação não se analisa por meio de um único conceito.

Para uma classe de situações, o aluno tem várias decisões a tomar, e estas são também objeto de uma organização invariante. Para Magina et al. (2008) o conjunto dos invariantes compreende objetos, propriedades e relações que podem ser reconhecidas e usadas pelo sujeito em ação, e que expressam a compreensão do educando sobre o conceito, por isso os invariantes dão significado ao conceito. Os invariantes dividem-se em: proposição e função proposicional, explicitados no Quadro 01.

Quadro 01: Proposição e função proposicional.

Proposição	Função proposicional
São teoremas em ação implícitos e têm validade local, ou seja, são verdadeiros apenas para um conjunto de situações.	São conceitos em ação implícitos, que se assumem pertinentes na ação.

Fonte: Autores.

A ação operatória de um conceito deve ser analisada por meio de uma variedade de situações. A TCC valoriza os aspectos estruturais dos invariantes, analisando-os do ponto de vista dos próprios saberes constituídos. De acordo com Vergnaud (1993) a TCC procura dar um conteúdo matemático às organizações das condutas observáveis em situação. Com isto, podemos compreender a reciprocidade do processo de transformação das situações e dos conhecimentos em sua relação com os conceitos.

Divisão de Números Naturais por Frações: Uma releitura segundo a ótica da TCC

O artigo *Children's sense of division of fractions* de Sylvia Bulgar, foi publicado em 2003, no *Journal Mathematical Behavior,* volume 22. Neste artigo, a autora apresenta alguns resultados da pesquisa realizada em uma escola pública que atendia estudantes do jardim de infância até a quarta série, em um pequeno distrito suburbano, em New Jersey.

Objetivou-se a introdução de conceitos de divisão de um número natural por frações. Os alunos foram convidados a investigar e desenvolver estratégias para resolver a atividade *Holiday Bows*[3]. Destaca-se que estes estudantes trabalharam em duplas ou grupos.

A classe em que a investigação foi realizada era composta por 25 estudantes, 14 meninas e 11 meninos, com faixa etária entre 9/10 anos. Foram realizadas 3 sessões de atividades, com duração de 60 minutos cada uma.

[3] Laços Festivos.

Para desenvolver a atividade *Holiday Bows* os estudantes receberam alguns materiais, como fitas coloridas, cordas, tesoura e fita métrica para construírem suas estratégias acerca de cada situação problema. A fita de cor vermelha continha 6 metros de comprimento, a dourada 3 metros, a azul 2 metros e a branca 1 metro.

Na atividade os estudantes deveriam determinar quantos laços de tamanhos particulares, e de forma fracionária, poderiam ser obtidos a partir do comprimento de cada fita colorida. No Quadro 02 apresentam-se as situações que os alunos investigaram.

Quadro 02 - Tarefa "Laços festivos"

Fita branca	**Comprimento do laço de fita**
1 metro	1/2, 1/3, 1/4, 1/5 metro
Fita azul	**Comprimento do laço de fita**
2 metros	1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 2/3 metro
Fita dourada	**Comprimento do laço de fita**
3 metros	1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 2/3, 3/4 metro
Fita vermelha	**Comprimento do laço de fita**
6 metros	1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 2/3, 3/4 metro

Fonte: Bulgar (2003, p. 323).

Em cada situação, era fornecida uma fita colorida, o comprimento do laço que deveriam obter e, em seguida, os alunos deveriam desenvolver estratégias para determinar a quantidade de laços obtidos em cada caso.

Bulgar (2003) identificou que as principais estratégias utilizadas pelos estudantes envolviam conhecimentos adquiridos com os números naturais. Outras justificativas foram dadas por meio da ação de medir ou pela representação fracionária, isto é, pelas quantidades de partes que podiam obter em cada pedaço de fita.

Cada um dos métodos envolvia a contagem. Para Bulgar (2003) há uma conexão entre contagem e frações, pois o trabalho com frações é um processo em que iteramos quantidades particionadas, e desta forma é formulado pela subestrutura de partições binárias.

Na sequência, discutimos as estratégias desenvolvidas pelos estudantes durante a atividade *Holiday Bows*, em que destacamos as respostas deles para identificar elementos da TCC.

Atividade 1B: 1ª estratégia - Justificativa envolvendo números naturais

Para resolver a situação proposta os estudantes converteram o metro em 100 centímetros antes de realizar a divisão, para que assim pudessem identificar quantos laços, de comprimento fracionário, continha cada unidade de fita colorida (1 metro, 2 metros, 3 metros e 6 metros). No Quadro 03, há o diálogo dos alunos Alex e Jon, em que discutem uma estratégia para identificar quantos laços de 1/3 metro de comprimento poderiam ser obtidos em 1 metro de fita.

Quadro 03: Diálogo entre Alex e Jon.

Diálogo	Tradução: autores
Alex: I know that fourths is twenty-five. It would be right here. [He examines the ribbon placed on top of the meter stick] **Jon:** I think . . . I think I got thirty and a half **Alex**: thirty and a half? That'd be thirty, sixty that's one whole that's sixty-one um plus thirty, is only ninety-one and a half. What'd you get, thirty and a half? **Alex:** I figure it's thirty-two. thirty-two and thirty-two is sixty-four and then thirty-two is ninety . Hold on a minute **Jon:** thirty-two and a half. So then it would be sixty-five. thirty-two and sixty-five is ninety-seven. **Alex**: Let's try it again. **Jon:** thirty-three. thirty-three. **Jon & Alex**: sixty-six **Jon**: No, sixty-six. sixty-six. ninety-nine. **Alex:** yeah	**Alex:** Eu sei que um quarto é 25 cm. Seria bem aqui. [Ele examina a fita colocada em cima do metro] **Jon:** Eu acho. . . Eu acho que tenho 30 e meio **Alex:** 30 e meio? Isso seria 30, 60 que é um todo, 61 mais trinta, é apenas 91 e meio. Como você chegou em 30 e meio? **Alex:** eu acho que é 32. 32 e 32 é 64 mais 32 é 90. Espere um minuto **Jon**: 32 e meio. Então seria 65. 32 mais 65 é 97. **Alex:** Vamos tentar novamente. **Jon:** 33. 33. **Jon & Alex:** 66 **Jon:** Não, 66. 66. 99. **Alex:** Isso mesmo

Fonte: Bulgar (2003, p.325).

Análise segundo a TCC

Os gestos, a tomada de decisão, a linguagem e o diálogo entre os alunos Alex e Jon são registros da atividade matemática realizada. A representação das grandezas em jogo e de suas relações com a atividade solicitada dizem respeito à conceitualização da divisão a partir do conhecimento sobre os números naturais.

Os estudantes indicaram que 1 metro tinha 100 centímetros, e com este comprimento de fita podiam obter 3 laços do mesmo comprimento, ou seja, realizaram uma divisão por 3. Neste caso, a estratégia de converter grandezas da mesma natureza facilitou a compreesão dos alunos.

O esquema utlizado pelos estudantes é relevante, pois indicaram o conhecimento de que a fita deve ser dividida em três partes iguais, e esse conceito é essencial para a conceitulização de frações.

As ideias extraídas da prática formalizaram os conhecimentos construídos na ação. De acordo com a TCC a forma predicativa da ação no discurso vem em auxílio à forma operatória construída em situação pelo aprendiz (VERGNAUD, 2009c).

O invariante identificado no discurso dos estudantes é do tipo ***conceito em ação***, considerado pertinente na ação em situação. Ressaltamos que este era o primeiro contato dos estudantes com a divisão de um natural por uma fração, e provavelmente por esse motivo eles mobilizaram o conhecimento prévio sobre os números naturais.

Com relação à representação utilizada, converter 1 metro em 100 centímetros, Vergnaud (2009c) afirma que:

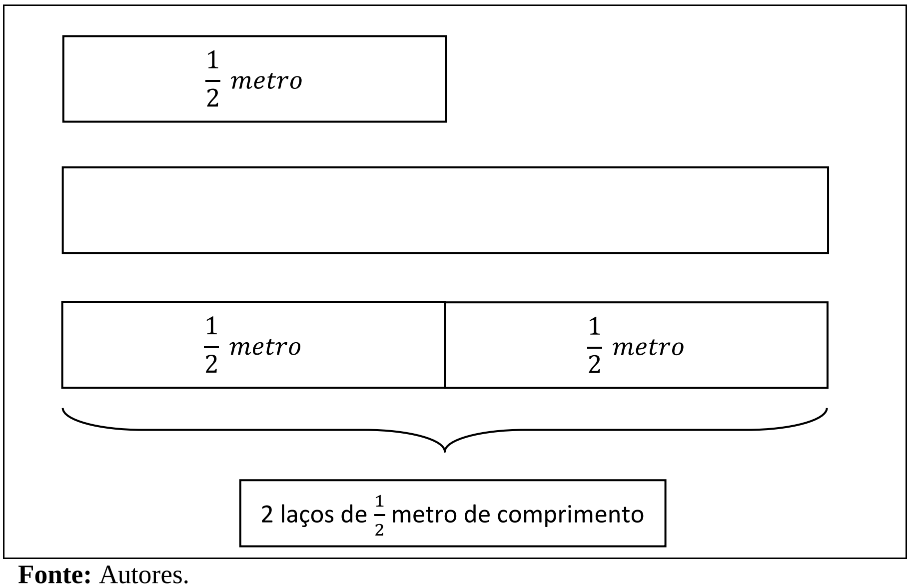
> [...] o sujeito em situação também é levado a interpretar a informação bem além dos observáveis que dispõe. Esse fluxo permanente de percepções, de ideias, de imagens, de gestos e de palavras interiorizadas é uma característica essencial do pensamento, que ela conduz a considerar a percepção como parte integrante da representação (VERGNAUD, 2009c, p.24).

Assim, a ação interiorizada - conversão de unidades - é parte integrante da representação utilizada pelos alunos. A representação é constituída de objetos pertinentes ao sujeito, aos quais considera e utiliza durante a atividade. É esse significado dado pelo estudante que permite considerar os invariantes como elementos essenciais para a representação (VERGNAUD, 2009c).

Atividade 2B: 2ª estratégia - Justificativa envolvendo medida

Os alunos criaram uma unidade de medida de comprimento igual ao laço desejado, colocaram-no junto à determinada quantidade de fita, e então contaram quantas vezes esta unidade de medida se repetia sobre a fita, conforme Figura 01.

Figura 01 – Representação da justificativa envolvendo medida.



Fonte: Autores.

Seguindo este procedimento para determinar a quantidade de laços poderiam obter nas fitas azul (2 metros), dourada (3 metros) e vermelha (6 metros) bastava utilizar o laço de 1/2 metro confeccionado, repeti-lo sobrepondo sobre as fitas e, contar quantos laços foram obtidos.

Para exemplificar a estratégia utilizada, apresenta-se no Quadro 04 o diálogo entre pesquisador e os alunos Alex e Jon. Os estudantes explicaram ao pesquisador que com a fita branca, de 1 metro de comprimento, era possível fazer 2 laços com 1/2 metro de comprimento cada.

Quadro 04: Diálogo entre Alex, Jon e pesquisador.

Diálogo	Tradução dos autores
Jon: This [points to white ribbon which is one meter in length] acts as two	**Jon:** Este [aponta para fita branca de um metro de comprimento] age como dois laços.
PRIN: Why does this act as two?	**PRIN:** Por que esse laço age como dois?
Alex: Because this [the white ribbon which is one meter in length] is the half. If you cut this in half.	**Alex:** Porque esta [a fita branca que tem um metro de comprimento] é a metade. Se você cortar este ao meio.
PRIN: OK	**PRIN:** OK
Alex: You have two parts.	**Alex**: Você tem duas partes.
Jon: So you put that up to it [they put the white one-meter length ribbon against the blue two-meter piece of ribbon].	**Jon**: Então você coloca até aqui [eles colocaram a fita branca com um metro de comprimento sobre a fita azul que tinha dois metros de comprimento].
Alex: It's two. And then you need. This [points to the white ribbon] is a half of that [points to blue ribbon] so you need one more and that's four.	**Alex**: São dois. E é o que você precisa. Esta [aponta para a fita branca] é a metade daquela [aponta para a fita azul] você precisa de mais uma desta, então são quatro.
So then this [points to the white ribbon] could act as three as cutting it into thirds as putting six thirds up to two but it's two meters is the whole so actually this if two meters is the whole.	Então esta [aponta para a fita branca] poderia agir como três, ou seja, cortá-la em três partes, com a colocação de seis terços até dois, mas estes dois metros é o todo, então realmente os dois metros é o todo.
Alex: then this [points to white ribbon] is the. This is the half.	**Alex:** então é esta [aponta para fita branca]. Esta é a metade.
PRIN: Right	**PRIN**: Certo.

Fonte: Bulgar (2003, p.326).

Análise segundo a TCC

O processo de reflexão sobre a produção do conhecimento revelado na fala dos alunos Alex e Jon evidenciam esquemas subjacentes à atividade matemática realizada. De acordo com Vergnaud (2009c) quando o sujeito atribui significado à situação, mobiliza seus esquemas prévios para aplicá-lo ao novo contexto. Este é o momento em que o sujeito se pergunta: “O que sei disso?”.

Neste caso, os alunos consideraram a justificativa envolvendo números naturais, em que já conheciam a quantidade de laços que era possível de se obter em 1 metro de fita. A partir desta informação, justificaram uma solução para a situação em que tinham 2 metros de fita. Descrever um procedimento (verbal/escrito) exige do sujeito novo posicionamento em relação aos objetos de conhecimento e suas representações, o que o leva refletir sobre suas formas de pensar, e então validar a solução, para aferir se o procedimento desenvolvido faz sentido ao sujeito, ou se está correto ou não.

A ação de descrever o procedimento verbalmente indica esquemas mobilizados pelos alunos em ação. Eles partem de conhecimentos prévios e adaptam à nova situação. Para Vergnaud (1993, p.1) “se pretendemos dimensionar concretamente a função adaptativa do conhecimento, devemos preservar um lugar central para as formas que ela assume na ação do sujeito”. Assim, a análise do papel da linguagem e do simbolismo na conceitualização é muito importante para a TCC.

Na situação em que os alunos indicaram quantas vezes um laço de comprimento igual a 1/2 de metro caberia em uma fita de 2 metros de comprimento, eles esticaram a fita e com sobreposições, contaram quantas vezes o laço se repetia. Para a TCC, o conhecimento operatório desenvolvido pertence à classe de situações em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, mas que após reflexão e experimentação podem levá-lo a desenvolver uma estratégia coerente à situação proposta.

O esquema mobilizado por Alex e Jon pode ser classificado como ***conceito em ação*** pertinente, visto que é uma proposição verdadeira para identificar a quantidade de laços em determinado comprimento de fita muito embora não seja a melhor estratégia quando se trabalha com grandes comprimentos.

De acordo com Bulgar (2003) outros alunos também fizeram esta medição para 1 metro de fita. A partir da justificativa envolvendo os números naturais. Identificaram que em 1 metro de fita poderiam obter 3 laços de 1/3 de metro de comprimento, multiplicaram esta quantidade por 2, para a fita de 2 metros, ou por 3, para a fita de 3 metros de comprimento. Neste caso, os alunos começaram a mudar sua forma de pensar sobre a situação proposta, pois modificam suas estratégias e realizam uma multiplicação. Essa é uma das propostas da TCC “situar e estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos” (VERGNAUD, 1993, p.1).

Para a multiplicação com números fracionários podemos associar a concepção parte-todo às concepções de operador e de medida, fazendo analogias com as operações com os números naturais, já conhecidas pelos alunos.

A respeito do assunto, Behr et al. (1983) acreditam que a multiplicação de números fracionários pode ser introduzida como uma extensão da multiplicação de números inteiros, a partir de situações que pedem para que seja encontrada a parte de uma parte como, por exemplo, a metade de um terço.

Atividade 3B: 3ª estratégia - Justificativa envolvendo representação fracionária

Para desenvolver a estratégia envolvendo ideias sobre a representação fracionária os estudantes utilizaram informações anteriores, e desta forma consideraram que cada metro de fita tinha um número igual de laços fracionados.

Na Figura 02 é apresentado o esquema dos estudantes Art e Katy, em que indicam a estratégia utilizada para determinar a quantidade de laços de 2/3 metro de comprimento que podem obter em 12 metros de fita.

Primeiramente, os alunos dividiram a fita em 12 metros. Pela experiência obtida nas atividades anteriores, as estudantes indicaram que cada metro poderia ser dividido em 3 laços de 1/3 metro de comprimento. Na sequência, realizaram a contagem da quantidade de laços com comprimento de 2/3 m. Concluíram desta maneira que, era possivel obter 18 laços de 2/3 metro de comprimento em 12 metros de fita.

Figura 02: Esquema utilizado por Art e Katy.

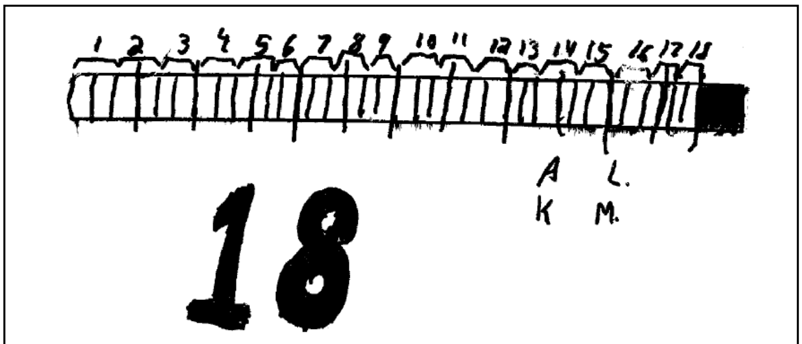


Fig. 2. Art and Katy's diagram.

Fonte: Bulgar (2003, p.328).

Análise segundo a TCC

De acordo com Vergnaud (1993, p.2), observa-se no conceito de esquema "uma sucessiva utilização de vários esquemas, que podem entrar em competição e que, para atingir a solução desejada, devem ser acomodados, descombinados e recombinados. Este processo é necessariamente acompanhado por descobertas".

É nos esquemas mobilizados pelos estudantes que observamos os conhecimentos em ação. Os educandos buscaram os conhecimentos anteriormente adquiridos – dividir cada metro em 3 partes iguais, para reorganizar o esquema e reagrupar a quantidade de laços com comprimentos de 2/3 de metro.

Desta forma, o invariante mobilizado pelos alunos é classificado pela TCC como ***conceito em ação***. A situação proposta pela pesquisadora foi apresentada aos estudantes verbalmente. Entretanto, não possuíam materiais para manipular, somente lápis e papel.

Vergnaud (1993) chama atenção para o funcionamento cognitivo dos alunos, que envolve operações que se automatizam progressivamente e, além disso, as situações problemas propostas aos educandos devem acontecer em diferentes níveis de generalidade para proporciona-lhes experiências diversificadas.

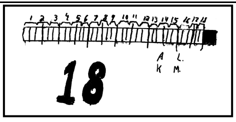
O diagrama elaborado pelas estudantes Art e Katy é um invariante, instrumento decisivo na construção da representação, o que proporciona aos educandos: refletir sobre a realidade da situação proposta e, realizar um cálculo relacional coerente à situação dada.

Considerações

No Quadro 05 elencam-se Situações, Invariantes e Representações para a estrutura multiplicativa de racionais na representação fracionária identificados em atividades desenvolvidas com alunos da 4ª série do Ensino Fundamental na pesquisa desenvolvida por Bulgar (2003).

Quadro 05: Elementos da TCC identificados em Bulgar (2003).

Estrutura multiplicativa de Números Racionais na Representação Fracionária			
	Situação	**Invariante**	**Representação**
1B	**Isomorfismo de medidas** Quantos laços de $\frac{1}{3}$ metro de comprimento podem ser obtidos em 1 metro de fita?	**Conceito em ação** A fita deve ser dividida em três partes iguais.	Converter 1 metro em 100 centímetros.
2B	**Isomorfismo de medidas** Quantos laços de $\frac{1}{2}$ metro de comprimento cabem em 2 metros de fita?	**Conceito em ação** Esticar a fita e com sobreposições, contar quantas vezes o laço de $\frac{1}{2}$ metro se repetiu sobre a fita.	Sobreposição da medida.
3B	**Isomorfismo de medidas** Quantos laços de 2/3 metro de comprimento podemos obter em 12 metros de fita?	**Conceito em ação** Dividir cada metro em 3 partes iguais, reorganizar o esquema e reagrupar a quantidade de laços com comprimentos de 2/3 de	Representação pictórica

		metro.	

Fonte: Zanella (2013).

Ensinar a divisão entre frações é um desafio para professores do ensino fundamental, pois é necessário desenvolver com os estudantes uma compreensão deste conceito mais do que uma compreensão algorítmica, que garante apenas a aplicação de procedimentos de cálculo. E para desenvolver tal compreensão é necessário considerar a natureza deste conceito e as formas de raciocinar do educando.

A perspectiva teórica de Vergnaud (1993, 2009b, 2009c) destaca que a compreensão psicológica dos conceitos matemáticos requer considerar os invariantes lógicos, os esquemas de ação, as situações de uso e os suportes de representação.

Os esquemas de ação que orientam a maneira como os estudantes lidam com as situações de divisão são: a distribuição e a correspondência um-para-muitos. A distribuição está presente desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, como se observa em situações de partilha, presente no esquema de correspondência um-para-um.

É fundamental que a divisão em partes iguais de um objeto considerado como unidade seja percebida pelo educando como a totalidade inalterada. Esta conservação de unidade é um elemento básico para a compreensão do conceito de fração.

De acordo com Vergnaud (2009b) não existe uma representação, mas múltiplas representações de formas diferentes e de diversificados níveis. Nas estruturas multiplicativas identificamos representação pictórica (por meio de desenhos), a linguagem natural e escrita.

O funcionamento cognitivo do aluno em uma situação baseia-se no repertório de esquemas disponíveis, formados anteriormente. De maneira geral, a estrutura teórica da TCC relacionada aos processos cognitivos, poderia apoiar os professores em suas tentativas de interpretar, explicar e dar sentido a formas de pensar dos educandos.

Referências

BEHR, MERLYN.; LESH, RICHARD; POST, THOMAS R.; SILVER E. Rational Number Concepts. In: LESH, RICHARD; LANDAU, MARSHA (Eds). **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,** (p. 91- 125). New York: Academic Press, 1983.

BULGAR, SYLVIA. Children's Sense-Making of Division of Fractions. In: **Journal of Mathematical Behavior**. 22. p.319–334. 2003.

CERVO, AMADO LUIZ. BERVIAN, PEDRO ALCINO. **Metodologia científica.** São Paulo: Makron Books, 1996.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M. M.; GATIRANA, V.; NUNES, T.. **Repensando Adição e Subtração: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais.** 3ª edição. São Paulo: PROEM, 2008.

VERGNAUD, GÉRARD. Teoria dos Campos Conceituais. In: **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, 1993, UFRJ**. Rio de Janeiro: Projeto Fundão – Instituto de Matemática – UFRJ, 1993, p. 1-26.

VERGNAUD, GÉRARD. **A Criança, a Matemática e a Realidade: Problemas do Ensino da Matemática na Escolar Elementar**. Tradução de Maria Lucia Faria Moro; Revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: Editora da UFPR, 2009b.

VERGNAUD, GÉRARD. O que é aprender? In: BITTAR, MARILENA; MUNIZ, CRISTIANO ALBERTO (Orgs.). **A Aprendizagem Matemática na Perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.** Curitiba: Editora CRV, 2009c.

ZANELLA, MARLI SCHMITT. **Um estudo teórico sobre as estruturas aditivas e multiplicativas de números racionais em sua representação fracionária.** Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática). UEM, Maringá, 2013.