CONCEITO IMAGEM E CONCEITO DEFINIÇÃO NO ESTUDO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS COM O GEOGEBRA.

Vilmar Gomes da Fonseca[1]

André Luiz Souza Silva[2]

Bruno Vianna dos Santos[3]

Everton Ferreira Santiago[4]

Isabela Luz Marçal[5]

Educação Matemática, Tecnologias Informáticas e Educação a Distância

Resumo: Este trabalho discute a utilização integrada do computador como ferramenta nas aulas de Matemática. É resultado de um estudo que analisou a utilização do software Geogebra como ferramenta para o ensino das funções exponenciais e logarítmicas, tomando como base a noção cognitiva de Conceito Imagem e Conceito Definição, desenvolvidos por Tall e Vinner (1981). O estudo se propôs a contribuir com melhorias e continuidade aos trabalhos de Fonseca (2011). A hipótese da pesquisa é a de que a devida exploração dos aspectos gráficos além de ser enriquecida pela dinamicidade do software pode representar uma rica imagem conceitual nos estudos de função. O estudo envolve a elaboração, análise e aplicação de uma sequência de três atividades numa turma de 1º ano do Ensino Médio Técnico em Química, do Instituto Federal do Rio de Janeiro – IFRJ na cidade de Nilópolis, RJ. Além de mensurar a aceitação da proposta do estudo como uma ferramenta para o ensino de funções, em particular, funções exponenciais e logarítmicas, esta pesquisa teve por objetivo mapear as práticas desses alunos com o uso do software durante o ensino dessas funções.

Palavras-chave: Função Exponencial. Função Logarítmica, Conceito Imagem e Conceito Definição. Geogebra.

[1] Mestre em Ensino de Matemática pela UFRJ. Atua como Professor Ensino Técnico e Superior do IFRJ. *vilmar.fonseca@ifrj.edu.br*

[2] Mestre em Ensino de Matemática pela UFRJ. Atua como Professor Ensino Técnico e Superior do IFRJ. andrelssilva@globo.com

[3] Mestre em Matemática – PROFMAT-IMPA. Atua como Professor Ensino Técnico do COLÉGIO PEDRO II. *vianna@impa.br*

[4] Licenciado em Matemática pelo IFRJ. everton.ferreira.matematica@gmail.com

[5] Licenciado em Matemática pelo IFRJ. iluzmarcal@gmail.com

1. Introdução

Quando falamos em ensino de Matemática, deparamo-nos com um número alarmante de fracassos em diversos níveis de ensino, em que os alunos saem despreparados para enfrentar os próximos níveis da aprendizagem. Muitos alunos não apresentam desempenho satisfatório em Matemática ou até mesmo afirmam não gostar desta matéria, pelo fato de não saberem de onde vêm estes conhecimentos e para que servirão.

A fim de reverter essa realidade, acreditamos ser necessário que o professor trabalhe os conceitos e conhecimentos matemáticos, ligando-os à realidade dos alunos. É preciso trabalhar de uma forma mais dinâmica, levando-se aspectos do cotidiano dos alunos para a sala de aula, estimulando-os a pesquisar sobre o assunto e a entender o que é e para que serve.

De outra forma, pesquisas recentes no Laboratório de aplicações Computacionais do IFRJ (FONSECA, 2012a, 2013b, SILVA, 2012) indicam que o uso de tecnologias, principalmente de softwares computacionais, ajuda a desenvolver estratégias de resolução de problemas e competências para aplicar conhecimentos matemáticos em outras áreas, como por exemplo, na física e na química, permitindo inclusive o exercício da memória, da imaginação, da percepção, além de raciocínios e competências na produção e transmissão de conhecimentos.

Apoiados nos estudos de Fonseca (2011) sobre o uso de software educacionais no ensino de Matemática e buscando embasamento teórico capaz de explicar como os alunos são estimulados a pensar sobre um determinado objeto, utilizamos a noção cognitiva de Conceito Imagem e Conceito Definição, desenvolvidos por Tall e Vinner (1981). Para esses autores, adquirir um *Conceito* significa formar uma *Imagem de Conceito* para este. Compreender um *Conceito* significa possuir uma *Imagem de Conceito*. A partir dessa noção, elaboramos um estudo exploratório composto de três atividades, visando estimular os alunos a desenvolver e ampliarem suas imagens mentais, sobre o conceito das funções exponencial e logarítmica procurando levá-los, não somente a compreender as definições matemáticas, mas também a aplicá-las na resolução das atividades.

2. Conceito Imagem e Conceito Definição

Um dos maiores desafios dos professores que ensinam Matemática é, sem dúvida, trabalhar com as definições matemáticas que, em geral, são apresentadas em linguagem abstrata, conseguindo que os alunos compreendam tais definições e saibam aplicá-las na resolução de problemas.

Diante desse grande desafio, poderíamos questionar: Então o que seria uma boa definição?

Ao fazer essa pergunta aos alunos, muitas respostas poderiam surgir. Dentre elas, com certeza, teríamos algo como "É aquela que pode ser entendida por mim sem, no entanto, apresentar tanto rigor matemático."

Há muitos anos que este problema vem sendo estudado por vários pesquisadores matemáticos. Entre eles, destacamos os trabalhos de David Tall e Shlomo Vinner (1981), que formularam uma teoria fundamentada na noção de Imagem de Conceito. Para os autores, o aluno deve primeiro se apropriar de vários conceitos imagens para, a partir daí, criar o seu próprio conceito definição. Mas o que é Imagem de Conceito e Definição de Conceito?

Segundo Tall e Vinner (1981) apud Fonseca:

> quando o aluno é estimulado a pensar sobre um determinado objeto, sua mente começa a trabalhar, surgindo assim várias representações visuais, impressões, experiências e propriedades, as quais são elaboradas pelos alunos por meio de pensamentos sobre estas representações mentais. Essas representações mentais são chamadas pelos autores de Imagem de Conceito.(FONSECA, 2011, p.25).

Sobre a Definição de Conceito os autores o definem como sendo toda a forma de representar, por meio de palavras, o Conceito Imagem. De acordo com Tall e Vinner:

> ... É então o tipo de palavras que o estudante usa para sua própria explicação da sua Imagem de Conceito (evocada). Se os conceitos definição lhes são dados ou construídos por si mesmo, pode variar ao longo do tempo. Dessa maneira um conceito definição pessoal pode ser diferente de um conceito definição formal, sendo este último um conceito definição que é aceito pela comunidade matemática. (1981, p.152)

Em seu trabalho, Tall e Vinner complementam dizendo que uma Definição de Conceito pode ser inexistente caso não tenha sido entendido ou esquecido pelo aluno, ou pode existir e ser inativo, como é o caso em que o aluno memoriza certas definições com o intuito de realizar alguma avaliação. A definição de Conceito pode ser formada a partir do momento em que o aluno é questionado e levado a explicar um determinado conceito.

Por exemplo, um aluno, ao ser indagado sobre o que entende por função exponencial, pode responder dizendo:

- ✓ “É a função cuja lei é dada por $f(x)=a^x$, com $a>0$ e $a\neq 1$”, ou mesmo,
- ✓ “É uma função cujo gráfico é curva acentuada que não toca o eixo x” ou ainda,
- ✓ “É a função cujos valores de y crescem ou decrescem exponencialmente”.

Para esse aluno, a definição de função exponencial representada por $f(x)=a^x$, por exemplo, foi a imagem que ele conseguiu assimilar, ou que ele memorizou quando teve que aprender esse conteúdo. Essa imagem faz parte do processo de ensino, podendo variar de pessoa para pessoa. No entanto, essa definição de função Exponencial pode ser alterada à medida que esse aluno adquire novas experiências e utiliza novas representações do mesmo objeto, na resolução de algum problema, em que o conceito de função exponencial é empregado.

Nesse sentido, Tall e Vinner consideram que a Imagem Conceitual descreve a estrutura cognitiva total que é associada ao Conceito.

Assim, por exemplo, o conceito de multiplicação é ensinado, inicialmente, como um processo envolvendo números naturais. Nesta fase, as crianças podem observar que uma mutltiplicação de dois números naturais sempre resulta num número maior que os fatores(exceto no caso da multiplicação por 0 ou 1). Para uma criança esta observação é parte da sua Imagem de Conceito e pode causar problemas mais tarde, quando se deparar com a mutiplicação de números decimais, em que o resultado do produto nem sempre é um número maior que os fatores. No produto de $30\times 0,5=15$, por exemplo, o resultado é um número menor que os fatores, ao invés de ser maior. Por esta razão, todos os atributos mentais associados ao conceito, sejam eles conscientes ou inconscientes, devem serem incluídos na Imagem de Conceito, pois eles podem levar a futuros conflitos.

Apoiados nas ideias de Tall e Vinner, consideramos a possibilidade de uma construção do processo de compreensão conceitual pautado na evidência das principais caracterizações do Conceito, como pontos chave nas experiências do aluno. Dessa forma estaremos, segundo esta teoria, construindo um processo cognitivo (contínuo) de construção da compreensão.

A busca por tais pontos tem sido realizada nas pesquisas em Educação Matemática, nas análises e sobre as dificuldades encontradas por alunos e professores. Com os alunos, o foco são as dificuldades que perduram e por isso se tornam cada vez mais entraves à continuidade da apreensão de conceitos. Já com os professores, as pesquisas tratam de estudar os principais motivos e/ou indicativos de suas frustrações em não obter êxito no ensino.

Em qualquer dos casos, a complexidade da generalidade do termo "conceito" é uma barreira. A esse respeito, diz Pais:

> Os conceitos são ideias gerais e abstratas desenvolvidas no âmbito de uma área específica de conhecimento, criados para sintetizar a essência de uma classe de objetos, situações ou problemas relacionados ao mundo-da-vida (2011, p. 55).

Diante disso, temos como grande desafio, desenvolver opções de ensino que permitam aos alunos uma maior compreensão conceitual. De acordo com Pais:

> Há uma tendência tradicional na prática de ensino da matemática que valoriza, em excesso, a função da memorização de fórmulas, regras, definições, teoremas e demonstrações. Como consequência, os problemas propostos são, nesse caso, mais voltados para a compreensão conceitual. Entretanto, essa concepção de educação está longe das exigências da sociedade tecnológica, tornando-se urgente a sua superação e a abertura de espaços para uma educação mais significativa e esse é um dos argumentos que justifica a importância da formação de conceitos. (2011, p. 56)

Assim, no sentido dessa teoria cognitiva, a grande vantagem de se utilizar um software computacional no ensino de funções com os alunos é a possibilidade de se obter uma educação mais significativa, proporcionando ao aluno uma compreensão, de maneira mais eficaz, do papel dos parâmetros de uma função, já que estes programas permitem modificar dinamicamente os gráficos.

Isto proporciona aos alunos uma visão geral do papel dos parâmetros nos gráficos, isto é, desligada de valores fixos, desenvolvendo assim uma rica Imagem Conceitual.

3. Metodologia de Pesquisa

A pesquisa realizada é de abordagem qualitativa e caracterizada como um estudo de caso da realização de um estudo exploratório com aplicação de três atividades, com o auxílio integrado do Geogebra, em uma turma de trinta alunos da 1ª Série do Ensino Médio Técnico em Química do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro – IFRJ, campus Nilópolis. Foi realizada durante o mês de janeiro de 2013, com alunos de faixa etária entre 14 e 16 anos.

É importante ressaltar que muitos professores de Química desse Instituto se queixavam de turmas em que grande parte dos alunos apresentava muitas dificuldades em realizar atividades que utilizavam a noção de função logarítmicas.

Para alguns desses professores, é de suma importância que o aluno tenha aprendido esse conceito muito bem e saiba utilizá-lo na resolução de problemas de inúmeras aplicações do Curso de Química, tais como: determinar o tempo de desintegração de uma substância radioativa, calcular fator PH de uma solução química, calcular a magnitude e amplitude de um terremoto na escala Richter , etc.

Todas as atividades foram aplicadas no laboratório de informática do IFRJ com auxilio de professores do LAC/IFRJ – Laboratório de Aplicações Computacionais do IFRJ, em três encontros de dois tempos de aula, totalizando 5h, entre os dias 17/01/2013 a 31/01/2013.

Os alunos foram divididos em duplas. Em cada encontro, os alunos recebiam um caderno de atividades e, à medida que manipulavam as telas dinâmicas desenvolvidas a partir do Geogebra, respondiam-nas juntos. Esse primeiro momento durou, no máximo, 50 minutos. Após todos responderem a ficha de atividade, os alunos eram convidados a apresentar suas respectivas soluções e analisá-las diante da turma, no próprio laboratório. O segundo momento da atividade foi realizado no 2º tempo de aula, composto por 50 minutos. Usou-se esse tipo de estratégia, a divisão em dupla, com o objetivo de facilitar a integração entre eles e devido ao pequeno número de computadores, dezessete apenas, disponíveis para uso.

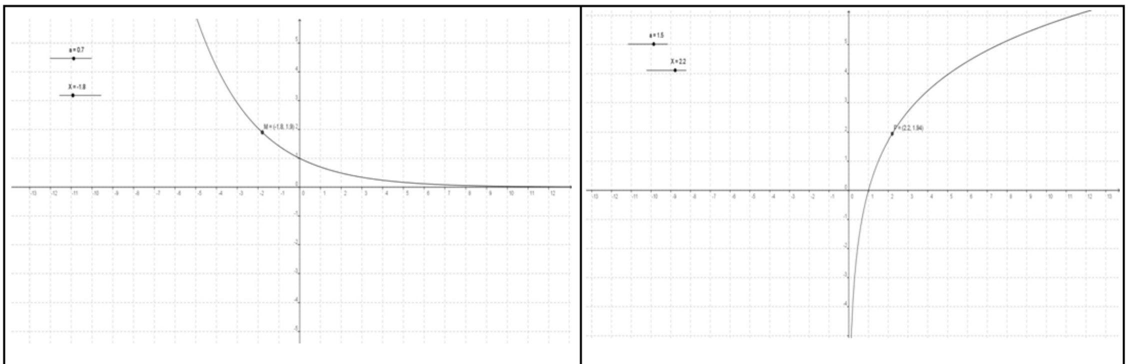
A seguir, descreveremos algumas situações didáticas que ocorreram na aplicação das atividades.

4. Os instrumentos da pesquisa

Todos os encontros foram realizados no laboratório de informática do IFRJ com o auxílio do Geogebra. As duas primeiras atividades tiveram como objetivo levar os alunos à investigação do comportamento dos gráficos das funções exponenciais $f(x) = a^x$ e $f(x) = \log_a x$ no plano cartesiano, e respectiva correlação com a classificação de crescimento e decrescimento. Essa investigação foi motivada pela variação do parâmetro a que representa a base dessas funções.

Para estas atividades esperávamos instigar a inferência sobre os motivos de classificarmos as funções trabalhadas em crescentes ou decrescentes. Nossas expectativas eram de que, no mínimo, eles conseguiriam uma descrição das já citadas características da expressão da função (ou especificamente, do parâmetro “a”) que as colocam em cada classificação.

Na figura 1, a seguir, apresentamos as telas que foram utilizadas na aplicação dessas duas primeiras atividades.



Tela usada na atividade nº 1 **Tela usada na atividade nº 2**

Figura 1

A terceira atividade foi elaborada com o objetivo de levar os alunos a investigarem os comportamentos adotados pelas funções exponencial e logarítmica, no mesmo plano cartesiano, definidas respectivamente, por $f(x) = a^x$ e $f(x) = \log_a x$, a partir da variação do parâmetro a (base dessas funções).

Para essa atividade esperávamos que os alunos fossem capazes de identificar a relação de inversão entre essas funções, isto é, que a função $f(x) = a^x$ é a função inversa da $f(x) = \log_a x$ e vice- versa. Veja na figura 2 a seguir, a tela utilizada na aplicação dessa terceira atividade.

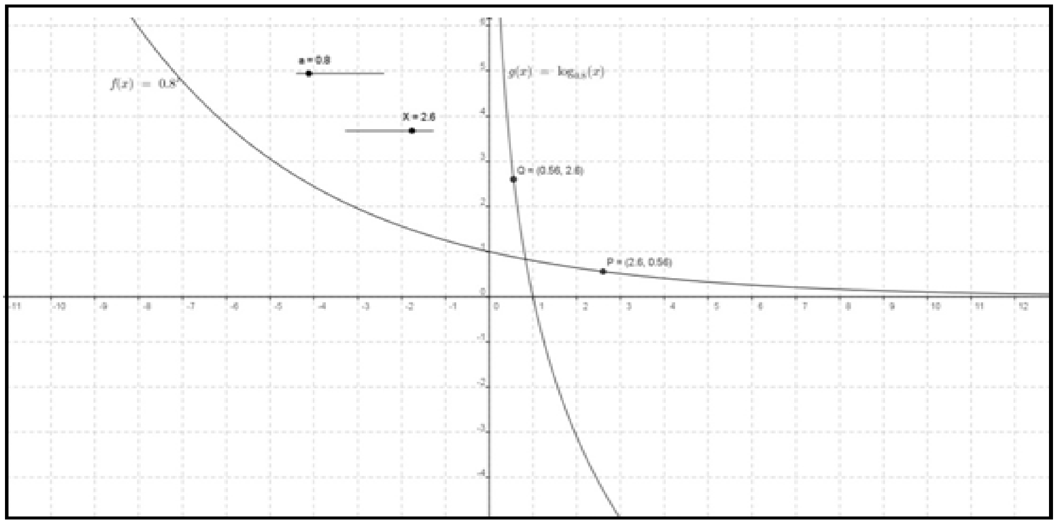


Figura 2

A seguir, faremos uma breve descrição dos resultados desses roteiros de estudo, que julgamos pertinentes.

5. Análise das respostas

A partir da produção dos alunos, verificou-se pouca dificuldade na realização das duas primeiras atividades. A maioria dos itens dessas atividades foi resolvida, de forma satisfatória, pela maioria das duplas dos alunos.

O item 4) da atividade nº 1 nos chamou a atenção. Na resolução desse item era visível a dificuldade apresentada pelos alunos em identificar o motivo de não ser possível a representação gráfica da função $f(x) = a^x$ para $a < 0$. Apesar de maioria das duplas ter conseguido alcançar parte da proposta do enunciado desse item, quando foram levados a justificar o comportamento do gráfico de $f(x) = a^x$ para $a < 0$, apenas duas duplas conseguiram justificar de maneira satisfatória.

Percebemos que à medida que os alunos interagiam com a tela do Geogebra, a parte visual e intuitiva (Imagem) estava sendo muito bem desenvolvida por eles. Porém, a parte definição precisava ser mais trabalhada. Uma das duplas que acertou essa questão apresentou uma resposta muito interessante.

Observe a seguir a resposta da dupla nº 7 para o item 4).

> 4. Para quais valores de **a**, não há representação gráfica da função $f(x) = a^x$? Justifique por que isso ocorre.
>
> Quando $a < 0$.
>
> Pois não encontraríamos um valor de y real com alguns valores de x, pois é um número complexo.
>
> Ex: $-2^x = y \therefore -2^{\frac{1}{2}} = y \therefore y = \sqrt{-2}$

Verifica-se que essa dupla justificou, de forma correta, o fato da não apresentação gráfica da função $f(x) = a^x$, quando $a < 0$. Perguntado sobre como eles poderiam afirmar que o número $\sqrt{-2}$ é um Número Complexo, mesmo sem terem estudado sobre esse tipo de número, um dos alunos da dupla respondeu:

– "Professor, não sei a definição de um número complexo. Mas quando estudei a variação do delta na função quadrática, meu antigo professor de Matemática, no 9º ano, me disse que a raiz quadrada de um número negativo é um número complexo e que eu aprenderia esse assunto no Ensino Médio."

Observe a seguir a resposta da dupla nº 10, para esse item 4).

> 4. Para quais valores de **a**, não há representação gráfica da função $f(x) = a^x$?
> Justifique por que isso ocorre.
>
> $a < 0$
>
> Qualquer valor negativo não tem raiz.

Observamos que para os alunos dessa dupla não ficou claro qual era o verdadeiro motivo da não representação gráfica da função $f(x) = a^x$, quando $a < 0$. Para eles, qualquer que fosse o valor $a < 0$ a expressão $f(x) = a^x$ não produziria um valor real.

Esse tipo de erro é bastante comum nos alunos que ainda não alcançaram a definição completa do conceito de função exponencial. A justificativa desses alunos estava errada, uma vez que mesmo para $a < 0$ e $x = -2$, por exemplo, a expressão $f(x) = a^x$ produz um número real. Obviamente, neste caso, expressão $f(x) = a^x$, para $a < 0$ não produz uma função exponencial de base a.

Quanto à análise da atividade nº 3, a maior dificuldade dos alunos foi apresentada na resolução dos itens 4) e 5).

Na resolução do item 4), percebemos que, embora a maioria desses alunos tivesse identificado a relação de inversão entre os gráficos das duas funções, (fato esse muito bem lembrado por eles, das aulas sobre logaritmos) alguns não conseguiram justificar as características que demonstram essa relação de inversão, como, por exemplo, os gráficos dessas funções serem simétricos em relação a reta y = x e as coordenadas dos pontos simétricos serem (x,y) e (y,x), isto é, a abscissa de um ponto é numericamente igual a ordenada do outro e vice-versa.

Observe a seguir a resposta da dupla nº 6, para esse item 4).

> 4. Você notou alguma relação entre os gráficos das funções exponencial e logarítmica? Que relação é essa?
>
> Até $a=1$, elas se comportam parecidamente, porém após $a>1$, os gráficos ficam opostos. A função exponencial é contrária da logarítma.

Observamos que os alunos dessa dupla ainda não demonstram uma imagem conceito que represente o significado geométrico do conceito de duas funções inversas. Acreditamos que a imagem conceitual ainda incompleta nesses alunos pode ser resultado da deficiência das correlações e conexões entre as unidades cognitivas no estudo do conceito de função inversa e sua representação gráfica.

Por causa desse tipo de dificuldade, percebemos que, na resolução do item 5), apenas cinco duplas conseguiram acertá-lo, mesmo tendo no enunciado uma “dica” de traçarem a reta definida pela função $y = x$ e verificarem qual é a sua relação com os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$ descritas na atividade.

Observe, nas Figuras 3, 4 e 5, a seguir, a resposta apresentada por três duplas na resolução desse item.

Figura 3 – Resposta errada, ao item 5) da atividade nº 3, apresentada pela dupla nº 4.

5. Digite a expressão y = x na barra de comandos do Geogebra. Essa expressão define o gráfico da função linear que é uma reta. Qual é a relação dessa reta com o gráfico das funções $f(x)$ e $g(x)$ no plano cartesiano?

y=x, caracteriza-se por uma reta inclinada que passa por 0
e f e g, são caracterizadas por uma reta.

Figura 4 – Resposta errada, ao item 5) da atividade nº 3, apresentada pela dupla nº 2.

5. Digite a expressão y = x na barra de comandos do Geogebra. Essa expressão define o gráfico da função linear que é uma reta. Qual é a relação dessa reta com o gráfico das funções $f(x)$ e $g(x)$ no plano cartesiano?

A reta formada, é o ponto exato entre f e g.

Figura 5 – Resposta correta, ao item 5) da atividade nº 3, apresentada pela dupla nº 13.

5. Digite a expressão y = x na barra de comandos do Geogebra. Essa expressão define o gráfico da função linear que é uma reta. Qual é a relação dessa reta com o gráfico das funções $f(x)$ e $g(x)$ no plano cartesiano?

A função exponencial é a inversa da logaritma na reta y=x

6. Considerações finais

Nosso objetivo, nesta pesquisa, foi apresentar uma proposta de ensino-aprendizagem~~,~~ por meio da aplicação de um estudo exploratório constituído por três atividades, que deveriam ser resolvidas de forma integrada ao Geogebra, proporcionando aos alunos uma rica imagem conceitual do gráfico das funções exponencial e logarítmica a fim de resolverem situações problemas que são modeladas por esse tipo de função.

Os resultados apontaram uma grande integração dos alunos com as telas dinâmicas desenvolvidas a partir do Geogebra para cada atividade desse estudo, permitindo que eles chegassem a conclusões importantes, que os levassem a resolução correta dos itens dessa atividade. Apesar da dificuldade apresentada por eles na resolução de alguns itens dessas atividades, após discussão conjunta, professor e alunos, em sala de aula, utilizando o Geogebra de forma interativa, percebemos que eles foram capazes de desenvolver uma imagem conceitual do Domínio, Imagem e comportamento do gráfico dessas funções.

Em relação à continuidade desse trabalho, sentimos a necessidade de aprofundar alguns aspectos mais detalhadamente, como as noções de domínio e imagem, destacando a diferença entre estes conjuntos e seus elementos, na análise gráfica das funções exponencial e logarítmica.

Embora esse trabalho tenha sido elaborado com vistas ao ensino das funções exponencial e logarítmica, considera-se imprescindível desenvolver um trabalho semelhante, com alunos de outras séries ou até mesmo com outros conteúdos, tais como estudo das funções afins, quadráticas, trigonométricas, da geometria analítica, geometria espacial, etc, pois as diversas ferramentas disponibilizadas pelo software Geogebra nos permite desenvolver uma série de telas dinâmicas com tais objetivos.

Ao finalizar esta pesquisa, vemos que o ensino de conteúdos matemáticos por meio do uso de softwares educacionais, quando bem planejado e executado, proporciona resultados satisfatórios. Por acreditar que o uso de recursos computacionais pode contribuir significativamente para a abordagem de conteúdos matemáticos e auxiliar no processo ensino-aprendizagem, esperamos que este trabalho sirva de apoio e incentivo aos professores que desejam inovar, deixar a prática conservadora de aulas exclusivamente expositivas e utilizar as modernas ferramentas que nos são oferecidas.

7. Referências

CASSIANO, M. B. ; DIAS, M. S. ; FONSECA, V. G. **Desenvolvimento de uma ferramenta de auxílio no ensino de Matemática Financeira: Um ambiente tecnológico de estudo das funções Custo, Receita e Lucro.** VII JIT – IFRJ – Pinheiral, 2013.

FONSECA, V. G. ; SANTOS, A. R. ; NUNES, W. V. **Estudo Epistemológico do Conceito de Funções: Uma retrospectiva.** XI ENEM: Educação Matemática: Retrospectiva e Perspectiva, Curitiba - PR, 2013.

FONSECA, V. G. ; NUNES, W. V. ; SILVA, A. L. S. ; DIONYSIO, R. B. **Função Afim: Um estudo das representações semióticas das soluções de questões por alunos da 1ª série do ensino médio.** XI ENEM: Educação Matemática: Retrospectiva e Perspectiva, Curitiba - PR, 2013a.

FONSECA, V. G. ; SANTOS, A. R. ; NUNES, W. V. ; SILVA, A. L. S. **Função Afim: Uma análise de obstáculos epistemológicos a partir de questões de exames nacionais.** XI ENEM: Educação Matemática: Retrospectiva e Perspectiva, Curitiba - PR, 2013b.

FONSECA, V. G. ; ANDRADE, H. A. **A Integração do Geogebra na Construção do Número FHI(Φ), suas Propriedades e Contribuições para a Educação Matemática.** ERTEM, Nilópolis – RJ, 2012.

FONSECA, V. G. ; SILVA, A. L. S. ; MARCAL, I. L. ; SANTIAGO, E. F. F. **O uso do software educacional no ensino médio: A integração do geogebra no ensino da função logarítmica.** ERTEM, Nilópolis – RJ, 2012a.

FONSECA, V. G. **O uso de Tecnologias no Ensino Médio: A Integração de Mathlets no Ensino da Função Afim** – Dissertação de Mestrado UFRJ, 2011.

GIRALDO, V., CARVALHO, L.M. & TALL, D. O. **Conflitos Teórico-Computacionais e a Imagem Conceitual de Derivada.** In L.M. Carvalho and L.C. Guimarães, História e Tecnologia no Ensino da Matemática, vol. 1, pp. 153-164, Rio de Janeiro, Brasil, 2003. (disponível em http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html. Acesso em outubro de 2012.

PAIS, L. C.. **Didática da Matemática; uma análise da influência francesa**. 3ª ed. Belo Horizonte, Autêntica Editora, 2011.

SILVA, A. L. S. ; FONSECA, V. G. ; MARCAL, I. L. ; SANTIAGO, E. F. F. **Um estudo sobre as possibilidades de vencer obstáculos epistemológicos do conceito de função através do uso do geogebra em atividades de ensino da função logarítmica.** ERTEM, Nilópolis – RJ, 2012.

TALL, D. O., VINNER, S. **Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity.** Published in Educational Studies in Mathematics, 12 pp.151-169, 1981. (disponível em http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1981a-concept-image.pdf. Acesso em janeiro de 2013.

ANEXOS

Atividade Nº 1 - Função exponencial.
Objetivo: Identificar o comportamento do gráfico da função exponencial.

Abra tela Atv.01 ggb. Nessa atividade você irá investigar o comportamento do gráfico da função exponencial no plano cartesiano. O seletor “a” corresponde a base da função $f(x) = a^x$. Mova esse seletor para direita e para esquerda e observe o comportamento do gráfico de $f(x)$. A seguir responda:

1. Quantas variações do gráfico de $f(x) = a^x$ você observou?

2. Descreva essas variações, relacionado-as aos intervalos dos valores de **a**.
   Intervalo 1: ____
   Intervalo 2: ____
   Intervalo 3: ____
   Intervalo 4: ____

3. Mova o seletor X que representa os pontos pertencentes ao eixo x. O que você observa as imagens dos valores de x quando $a = 1$? E quando $a = 0$?

4. Para quais valores de **a**, não há representação gráfica da função $f(x) = a^x$? Justifique por que isso ocorre?

Atividade Nº 2- Função logarítmica.
Objetivo: Identificar o comportamento do gráfico da função logarítmica.

Abra tela Atv.02 ggb. Nessa atividade você irá investigar o comportamento do gráfico da função logarítmica no plano cartesiano. O seletor “a” corresponde a base da função $g(x) = \log_a x$. Mova esse seletor para direita e para esquerda e observe o comportamento do gráfico de $g(x)$. A seguir responda:

1. Quantas variações do gráfico de $g(x) = \log_a x$ você observou?

2. Descreva essas variações, relacionado-as aos intervalos dos valores de **a**.

   Intervalo 1: ____
   Intervalo 2: ____
   Intervalo 3: ____
   Intervalo 4: ____

3. Mova o seletor X que representa os pontos pertencentes ao eixo x. O que você observa as imagens dos valores de x quando $a = 1$? E quando $a = 0$?

4. Para quais valores de **a**, não há representação gráfica da função $g(x) = \log_a x$? Justifique por que isso ocorre?

Atividade Nº 3- Função exponencial e Função logarítmica

Objetivo: Identificar a relação de inversão entre essas funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$ a partir da análise do comportamento de seus gráficos no mesmo plano cartesiano.

Abra tela Atv. 03 ggb. Nessa atividade você irá investigar o comportamento das funções exponencial e logarítmica, no mesmo plano cartesiano. O seletor "a" corresponde a base das funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$. Mova esse seletor para direita e para esquerda e observe o comportamento dos gráficos dessas funções. A seguir responda:

1. Quantas variações do gráfico dessas funções você observou?

2. Descreva essas variações, relacionado-as aos intervalos dos valores de **a**.
   Intervalo 1: ____
   Intervalo 2: ____
   Intervalo 3: ____
   Intervalo 4: ____

3. Mova o seletor X que representa os pontos pertencentes ao eixo x. O que você observa nas funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$, com as imagens dos valores de x, quando $a = 1$? E quando $a = 0$?

4. Você notou alguma relação entre os gráficos das funções exponencial e logarítmica? Que relação é essa?

5. Digite a expressão na barra de comandos do Geogebra. Essa expressão define o gráfico da função linear que é uma reta. Qual é a relação dessa reta com o gráfico das funções $f(x)$ e $g(x)$ no plano cartesiano?