

VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática



ULBRA - Canoas - Rio Grande do Sul - Brasil

16, 17 e 18 de outubro de 2013

Comunicação Científica



A SIMETRIA POR MEIO DE UMA PROPOSTA INVESTIGATIVA: HISTÓRIA E IMPLICAÇÕES CULTURAIS

Lidiane Schimitz Lopes¹

Gilson Leandro Pacheco Alves²

André Luis Andrejew Ferreira³

Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental

Resumo: Este artigo apresenta um panorama acerca da simetria enquanto conhecimento matemático e/ou característica perceptível, além de uma proposta de atividade direcionada à Educação Básica. Analisando os padrões simétricos desde a pré-história e reconhecendo as influências culturais de várias épocas nos diferentes estilos das construções, destacamos a relevância desse saber matemático. Nessa perspectiva, admite-se a etnomatemática como a teoria capaz de explicar a íntima ligação entre conhecimento matemático e o momento cultural no qual foi produzido. Por meio de uma proposta investigativa, sugere-se uma abordagem inicial do conteúdo *transformações geométricas*, geralmente direcionado ao 9º ano do Ensino Fundamental. Ao utilizar materiais de baixo valor financeiro, propõe-se uma atividade para ser aplicada inclusive em turmas numerosas de escolas com poucos recursos.

Palavras Chaves: Etnomatemática. Proposta investigativa. Simetria.

Introdução

A ideia de simetria, tal qual se entende hoje, remete ao que é ensinado na escola básica. O conceito matematizado dessa característica é analisado em algumas formas geométricas, além de expressar as ideias de padrão, beleza e proporção. Todas essas propriedades são perceptíveis à maioria das pessoas e não necessitam de fundamentos formais e teóricos propriamente ditos para serem observados.

A presença de características simétricas é tão evidente e historicamente perceptível que foi introduzida na Educação Básica para sua abstração e formalização, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998). Nas diversas áreas da Matemática, a simetria é

¹ Acadêmica do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Especialista em Estudos Matemáticos – Ênfase em Educação Matemática. Universidade Federal de Pelotas. lidischimitz@hotmail.com

² Acadêmico do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Especialista em Estudos Matemáticos – Ênfase em Educação Matemática. Universidade Federal de Pelotas. gilsonalves@hotmail.com

³ Doutor em Informática na Educação pelo PPGIE/UFRGS. Universidade Federal do Pelotas. andrejew.ferreira@gmail.com

estudada a partir de vários vieses. O mais trivial está associado à Geometria. Figuras ditas simétricas são aquelas nas quais é possível identificar um eixo de simetria, inclusive quando essas são composições resultantes da rotação ou translação de uma figura primitiva. Alguns gráficos de funções também possuem essa característica. As funções ímpares (funções polinomiais de índice ímpar e algumas trigonométricas) possuem representação gráfica simétrica à origem, enquanto as pares (polinomiais de índice par e outras trigonométricas), em relação ao eixo Oy.

No Ensino Fundamental, as equações algébricas podem ser introduzidas utilizando o exemplo das balanças de dois pratos. Nesse caso, a equação é mantida enquanto os pratos estão equilibrados, isto é, a imagem da balança está simétrica. Se não houver simetria, significa que uma expressão é maior ou menor que a outra.

Após a apresentação de um panorama histórico e cultural, esse trabalho traz uma proposta de atividade para a introdução do conteúdo de simetria, baseada na investigação, para turmas de 9º ano de Ensino Fundamental. Tal atividade é fruto de um trabalho da disciplina *Matemática Experimental*, no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática – Mestrado Profissional, realizada nos meses de janeiro e fevereiro em virtude da greve das IFES e, portanto, ainda não foi aplicada.

1. Simetria: o padrão das construções geométricas

Através dos tempos, percebe-se que as grandes construções que perpetuaram e transmitem a herança cultural dos povos apresentam padrões de simetria. Rooney (2012) destaca que “os primeiros contatos com a geometria são anteriores aos sistemas de números e escritos” (p. 73) e que os povos antigos deixaram inúmeras evidências de seus interesses por padrões repetidos e simetria de formas em objetos, decorações e estruturas. “Alguns desses padrões datam de 25.000 a.C.. Antigas estruturas construídas ou alinhadas com precisão considerável são outros testemunhos do domínio de algumas formas simples de geometria pelos nossos ancestrais” (ROONEY, 2012, p.74).

Alguns dos registros mais antigos datam do Período Neolítico, considerado último período da Idade da Pedra e cujo início se deu por volta de 8.000 a.C.. Segundo Boyer e Merzbach (2012)

O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria. Seus potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruência e simetria, que em essência são partes da geometria elementar e aparecem em todos os continentes. (p. 26)



Figura 1 – Exemplo de arte do período neolítico.

Na civilização egípcia antiga é evidente o uso de um padrão em suas criações. Buscando criar figuras de fácil compreensão, os egípcios valiam-se do equilíbrio e da simetria para criar composições altamente organizadas. Segundo Enright (2012), os artistas desenhavam grades formadas por linhas verticais e horizontais para criar proporções exatamente iguais. Durante esse mesmo período, na Mesopotâmia, os sumérios desenvolveram igualmente o senso de proporções, porém suas composições não eram tão elaboradas quanto as egípcias.



Figura 2 – Exemplo de arte egípcia.



Figura 3 – Exemplo de arte suméria.

A arte da Grécia Antiga, por volta do século V a.C., estabelece um sistema de proporções ideais, possibilitando a construção de grandes obras como, por exemplo, o Partenon. Na Roma Antiga, o arquiteto Marco Vitruvio Polion desenvolveu a obra intitulada *De architectura libri decem*, contendo informações sobre a construção de cidades, considerando as necessidades de proteção e conforto da população.

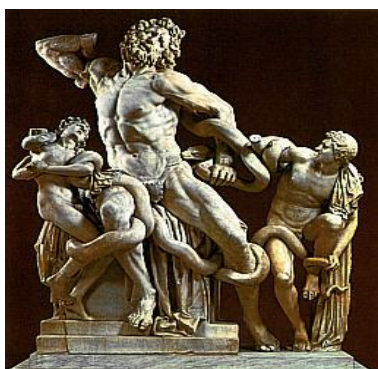


Figura 4 – Exemplo de arte grega.

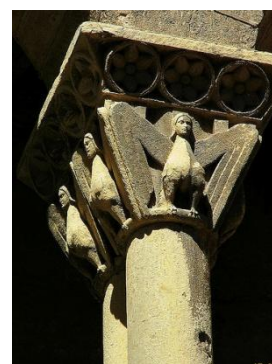


Figura 5 – Exemplo de arte romana.

Durante a Idade Média, as composições artísticas eram marcadas pela religiosidade tendo a simetria como base. Na arquitetura isso se tornou mais evidente e característico na construção de grandes igrejas.

A estética da *proportio* era verdadeiramente a estética da Idade Média por excelência. O princípio de simetria, também nas suas expressões mais elementares, era um critério instintivo de tal modo radicado no espírito medieval que era susceptível de determinar a própria evolução do repertório iconográfico. Este provinha da Bíblia, da liturgia, (...) mas, frequentemente, exigências de simetria levavam a modificar uma cena que a tradição tinha transmitido em termos bem definidos, e até a violar os hábitos e a verdade histórica mais comum. (ECO, 1989, p. 53).

Percebe-se que, muito além de um conceito matemático como é conhecido hoje, a simetria na Idade Média era requisito primordial para a beleza artística.



Figura 6 – Exemplo de arte na Idade Média

Nos séculos conhecidos como Renascimento, houve a valorização e retomada da arte da Antiguidade Clássica, além da valorização do homem e visão científica da natureza. O desenvolvimento nas artes plásticas, especialmente, buscava a beleza por meio de proporções e simetrias, de acordo com os parâmetros ditados pelo belo clássico.



Figura 7 – Exemplo de arte renascentista

Boyer e Merzbach (2012) destacam que “o Renascimento poderia perfeitamente ter desenvolvido a geometria pura na direção sugerida pela arte e pela perspectiva” (p. 211), entretanto, a criação da geometria algébrica modificou o interesse dos matemáticos da época.

Desde tempos remotos até a atualidade, a arte islâmica é baseada em traços simétricos, com padrões de repetição. As formas poligonais simétricas utilizadas para a criação desses padrões podem ser infinitamente estendidas, repercutindo conceitos da geometria moderna. Os árabes são os criadores dos mosaicos geométricos.



Figura 8 – Detalhe em uma parede no Alhambra, Granada

Evidencia-se aqui, através de alguns exemplos, que o conceito de simetria atravessa várias culturas de diferentes povos em épocas distintas. Hoje se entende simetria como um fundamento ou propriedade matemática, mas, ao analisar historicamente, constata-se que a percepção simétrica precede e/ou não necessita de formalismo matemático.

2. A cultura nas formas e a Etnomatemática envolvida

Não é difícil perceber e relacionar o desenvolvimento cultural das civilizações com sua herança arquitetônica. Nos povos mais conhecidos da antiguidade (egípcios, gregos e romanos) a herança histórica material mais evidente são suas grandiosas edificações que atravessaram os milênios. As pirâmides no Egito, o Partenon na Grécia e o Coliseu em Roma são exemplos e símbolos da força cultural, econômica e militar vivida por esses povos.



Figura 9 – Pirâmide de Quéops.

Porém, a sustentação dessas civilizações como centro de poder no mundo, cada uma em seu tempo, muito se deu pela detenção do conhecimento científico, em especial o matemático. A matemática de cada civilização, local e temporalmente específica, colaborou para a resolução de seus problemas mais básicos, como alimentação e proteção, mas também se fez presente na manifestação cultural desses povos através da construção e do embelezamento de suas edificações.



Figura 10 – Partenon.

A Arquitetura através dos tempos manteve a capacidade de satisfazer a duas necessidades inerentes ao homem: (I) de abrigo, no sentido de proteção das intempéries climáticas e inimigos, e (II) a satisfação do olhar, experiência estética ligada ao sentimento de beleza que, em um primeiro momento, visava agradar aos deuses.

É impossível se referir à beleza arquitetônica sem falar em simetria. Por sua vez, não se pode explicar a simetria detendo-se apenas à assepsia das formas geométricas ideais como o triângulo, a circunferência ou os sólidos de Platão. Até mesmo porque a perfeição dessas formas é uma condição abstrata só concebível no nível do pensamento, enquanto a harmonia nas formas de um edifício é algo sensível.

O pensamento matemático é responsável pela criação de muitos objetos amplamente estudados, mas só concebíveis na mente humana. Imagine, por exemplo, um triângulo equilátero, cujas relações métricas há muito foram demonstradas, cujas propriedades são exaustivamente estudadas na matemática acadêmica e escolar. Entretanto, não existe tecnologia de aferição que garanta a igualdade de comprimento entre seus três lados. Não existe porque não se pode determinar o grau máximo de precisão de um instrumento de medida a ponto de se dizer que dois segmentos de reta são idênticos. Além disso, segmentos de reta não podem ser manuseados, mas apenas sua representação, o traço retilíneo. Sempre é possível imaginar uma fração menor da unidade de medida tomada como padrão. Isso pode ser comparado à ideia de limite e as somas ou divisões infinitas. No entanto, mesmo ideal ou

abstrata, a geometria ou matemática das formas, é um dos pilares da engenharia e arquitetura de resultados tão concretos.

Voltando à simetria, pode-se dizer que ela está em muitas coisas concretas à nossa volta, mesmo sendo considerada uma propriedade matemática. Na natureza, também a percebemos, mas não se pode ter certeza se as formas naturais se fizeram simétricas ou se simplesmente nossos olhos, viciados em matemática, reconhecem nelas tal característica. As asas de uma bela borboleta são simétricas ou atribuí-se simetria matemática a algo que é naturalmente belo?



Figura 11 – Forma naturalmente simétrica (reflexão)

Como em relação às coisas naturais essa dúvida não será facilmente superada, convém focar nas construções humanas, tais como a própria matemática. Não são necessários profundos conhecimentos de engenharia e arquitetura para saber que desenho e construção estão intimamente ligados: normalmente na elaboração do projeto. E o desenho, sendo a representação das formas, nos remete à geometria. De forma simplificada se fecha o enlace entre arquitetura e matemática.



Figura 12 – Coliseu

Voltando ao enfoque da arquitetura como uma manifestação cultural, é sabido que os pesquisadores dessa área não tem dificuldade, ao analisar uma edificação antiga, em dizer para que se prestava e qual período histórico fora construída e utilizada. Se as formas de um

prédio, estrada, ponte, monumento ou de qualquer outra construção arquitetônica são capazes de revelar seu contexto, isso também revela que existe uma matemática específica, ou seja, uma etnomatemática envolvida. Pouco importa se essa matemática era genuína daquele local ou foi influenciada por matemáticas estrangeiras. A partir das ideias de D'Ambrósio (2007), pode dizer que, mesmo híbrida, houve uma geometria a serviço da engenharia, da arquitetura e da arte daquele grupo.

No mundo globalizado de hoje talvez seja difícil encontrar matemáticas puramente locais. Mas foi nesse mundo antigo, anterior às Grandes Navegações, dividido em continentes isolados por oceanos intransponíveis e inóspitos acidentes geográficos, que foram erguidas as grandiosas obras que tomamos como exemplo anteriormente. Todas três são ricos exemplos de formas simétricas, frutos da engenhosidade e criatividade humanas, além de etnomatemáticas eficientes utilizadas pelos pensadores e executores dessas obras.

Segundo Santos (2007), a verdadeira beleza é sempre a natural ou geométrica. Em seu trabalho intitulado *A Matemática da Arquitetura Ideal*, essa pesquisadora faz referência a Vitruvius⁴, como sendo o primeiro a relacionar e tomar como padrão para o belo, referindo-se às formas, as proporções e simetria do corpo humano. Ressalta ainda que o conceito de simetria de Vitruvius é diferente do qual é usualmente adotado hoje em matemática. Para ele, simetria é a relação entre os vários elementos do plano e cada um desses elementos com os do corpo humano. Essa correlação ou comparação também pode ser entendida como proporção.

Dessa forma, entende-se que a matemática de um povo também se revela culturalmente através da arquitetura e da arte, se é que é possível separá-las. E por que não perguntar simplesmente pela matemática utilizada e sim pela etnomatemática envolvida? D'Ambrósio (2007), ao definir a etnomatemática como a matemática dos distintos grupos sociais, não descarta a matemática europeia, tão influente no ensino acadêmico, de ser apenas mais um tipo de etnomatemática. Pela abordagem histórica que foi feita e pela opção de se evidenciar as culturas de distintos povos em diferentes épocas, considera-se conveniente a adoção do termo e da abordagem etnomatemática.

⁴ Vitruvius fez um dos mais conhecidos estudos sobre simetria dos templos e apresenta a proporção entre as partes do corpo tal qual a cabeça seria $\frac{1}{8}$ da altura do corpo, os pés seriam $\frac{1}{6}$ do corpo e a face $\frac{1}{10}$ do corpo. Essa regra indica espantosa diferença com a natural harmonia corporal, como fazem alguns comentários da renascença, que muitos estimulam a correção. Assim, Leonardo da Vinci, informa para a largura do busto como $\frac{1}{4}$ da altura do corpo, cuja razão aplica-se sobre os ombros. Da Vinci também reduziu o pescoço de $\frac{1}{15}$ do corpo humano para $\frac{1}{24}$ e o pé de $\frac{1}{6}$ da altura do corpo para $\frac{1}{7}$. (SANTOS, 2007, p. 4)

3. Uma proposta de atividade envolvendo investigação

Investigar, para Ponte *et al* (2003), é um termo que pode ser empregado de várias maneiras. Para algumas pessoas, trata-se de um trabalho realizado apenas por investigadores profissionais. Para outras, é uma atividade que pode ser desenvolvida no dia-a-dia das pessoas das mais diferentes esferas sociais. Em sala de aula, a investigação pode ser aliada na formação dos alunos e prática dos professores. “Para os matemáticos, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades” (PONTE *et al*, 2003, p.13).

Apresenta-se nesse trabalho uma proposta para a introdução do conteúdo de Simetrias. Em geral, os livros didáticos o apresentam com o nome de *Transformações Geométricas* e são direcionados a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1998) para o ensino de matemática, encontra-se como objetivos para a disciplina em sala de aula “identificar características de figuras geométricas, percebendo semelhanças e diferenças entre elas, por meio de composição e decomposição, simetrias, ampliações e reduções” (BRASIL, 1998, p. 56), bem como a “identificação de semelhanças e diferenças entre polígonos, usando critérios como número de lados, número de ângulos, eixos de simetria, etc.” (*Ibidem*, p. 60). O documento traz também a relevância de desenvolver atitudes como a sensibilidade para observar simetrias e outras formas geométricas em construções, nas artes, na natureza.

Assim, é necessário que o aluno compreenda o que são figuras simétricas e eixos de simetria, além de construir e perceber simetrias por reflexão, translação e rotação. Nas três primeiras etapas dessa atividade, os alunos poderão estar dispostos em duplas ou trabalharem de forma individual. Para o desenvolvimento dessa proposta cada estudante (ou dupla) precisará dos seguintes materiais, conforme a figura 13:

- 2 folhas de papel quadriculado;
- 1 folha de papel carbono;
- 2 folha de papel ofício.
- Lápis;
- Borracha;
- Régua.



Figura 13 – material utilizado

A atividade é realizada em quatro etapas, ocupando ao total o período de 4 a 6 horas/aula.

3.1. 1ª etapa: investigando a simetria por reflexão

A proposta dessa etapa está no fato dos alunos criarem figuras simétricas espontaneamente, a partir de um desenho livre.

Uma folha de papel ofício deverá ser dobrada ao meio, marcando a linha que divide a folha. Os alunos deverão unir a folha de papel ainda aberta com o papel carbono de modo que o “lado que escreve” do carbono esteja em contato com a folha. Ao refazer a dobra, o carbono deve permanecer no seu interior, conforme a figura 14 abaixo.



Figura 14 – dobra do papel e carbono

Ao desenharem uma figura qualquer em um dos lados do papel ofício (Figura 15), os alunos criarão duas figuras simétricas por reflexão na parte interna dessa folha (Figura 16). O professor pode estimular o raciocínio dos alunos com algumas questões como: “o que aconteceu na parte de dentro dessa folha?”; “as figuras criadas são parecidas ou são iguais?”; “há diferenças entre elas? Quais?”; “vemos isso acontecer na nossa vida?”; “quando estamos na frente do espelho, o que acontece?”; “se fizermos um desenho longe da dobra do papel,

como ele fica na parte de dentro?"; “e se fizermos um bem próximo à linha da dobra, o que acontece?”.

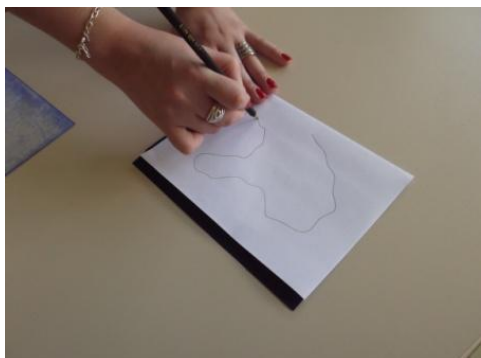


Figura 15



Figura 16

A partir da análise realizada nessa figura, os alunos, com a mediação do professor, perceberão que a linha do meio divide o desenho em dois lados iguais, ou seja, a marca da dobra do papel representa um eixo que divide o desenho em dois lados simétricos. Assim, naturalmente, os estudantes construirão os conceitos de eixo de simetria e simetria por reflexão.

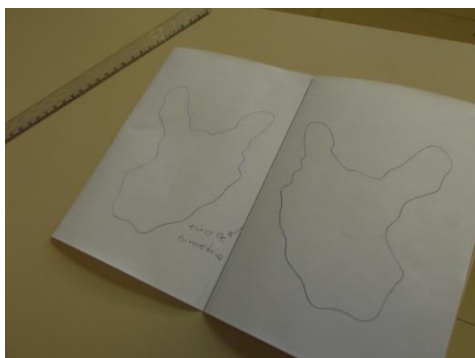


Figura 17– Figura simétrica por reflexão

3.2. 2ª etapa: descobrindo os eixos de simetria

A proposta dessa etapa está no fato dos alunos perceberem que uma figura simétrica pode ter um ou mais eixos de simetria.

Os alunos deverão dividir a folha branca em duas partes iguais, ficando com duas folhas menores. A primeira será trabalhada da forma que está: um retângulo. A segunda deverá ser cortada, formando um triângulo, conforme a figura 18.



Figura 18

Realizando dobraduras, os alunos deverão descobrir quantas e de quais maneiras podemos dividir a folha retangular em duas partes iguais. Serão encontrados 4 formas distintas, conforme a figura 19.



Figura 19

No caso do triângulo, há apenas um eixo de simetria, conforme a figura 20.

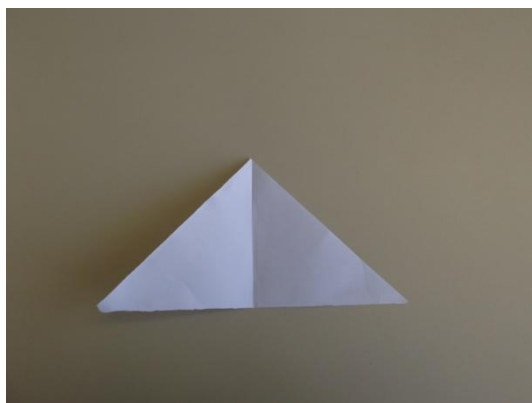


Figura 20

3.3. 3ª etapa: Construindo figuras simétricas e assimétricas a partir de comandos numéricos.

A proposta dessa etapa é que, a partir de sequências numéricas com comandos pré-estabelecidos, os alunos criem figuras simétricas e assimétricas. Também faz parte dessa etapa investigar quais os tipos de sequências geram figuras simétricas e assimétricas.

Analisando figuras criadas a partir dessas sequências, os alunos deverão classificá-las em simétricas ou assimétricas. Nas figuras simétricas deverão identificar o(s) eixo(s) de simetria.

As figuras serão criadas em papel quadriculado a partir de comandos numéricos, girando sempre 90° . Quando o número for positivo, o giro será no sentido horário. Se o número for negativo, o giro será no sentido anti-horário. Os números representam a quantidade de quadradinhos que se deve andar em cada direção. O primeiro movimento é sempre do ponto de origem para cima. São exemplos de comandos as sequências:

- a) 3, 9, 3, 9 → Gera um retângulo, figura simétrica com 4 eixos de simetria (figura 21).

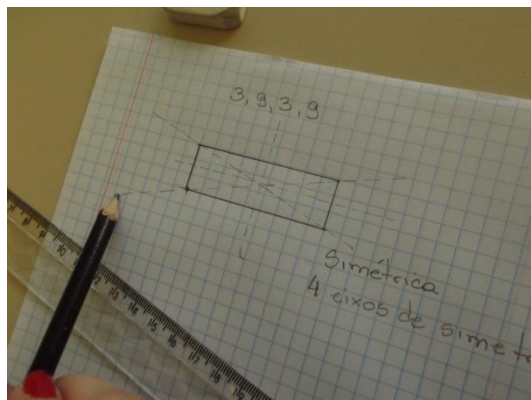


Figura 21

- b) 4, 9, 6, 8, 5, 7, 4, 6, 3, 3, 9 → Gera uma figura assimétrica, conforme a figura 22.

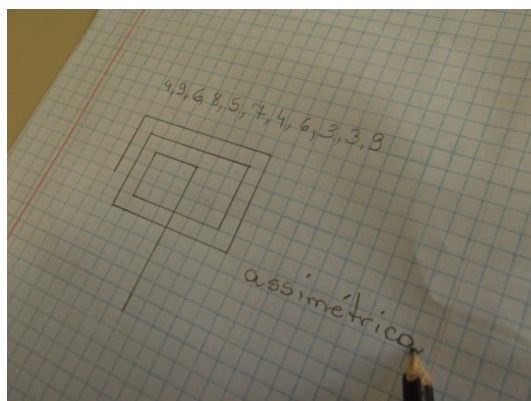


Figura 22

proposta configura em uma alternativa para abordagem desse conteúdo, cuja relevância já foi salientada nesse trabalho.

Alguns dos pontos positivos dessa atividade são os baixos custos dos materiais e a simplicidade de sua execução, dando ao professor a liberdade de realizá-la em sala de aula ou em outro espaço disponibilizado pela escola, como o pátio ou a biblioteca.

Algumas considerações

A partir de um olhar histórico é possível perceber que a ideia de simetria antecede a linguagem matemática formal. A percepção de padrões simétricos em traços arquitetônicos e nas artes é reflexo da produção cultural de uma sociedade. Aliado a isso, salienta-se as matemáticas locais, ou etnomatemáticas, que possibilitaram criações envolvendo padrões de simetria, desde cestos e tapetes até grandes e imponentes edificações.

Até meados do século XV, primava-se pela perfeição simétrica na construção de grandes templos visando agradar aos deuses. A partir do Renascimento, o homem voltou-se para si próprio e a simetria continuou garantindo em suas obras o padrão de beleza almejado na época.

Admitindo a necessidade do estudo das transformações geométricas na Educação Básica, em virtude do reconhecimento dessa característica geométrica na arquitetura, nas artes e até as formas da natureza, julgamos válida a iniciativa de procurar formas diferenciadas para o ensino dessa propriedade matemática na escola.

Nessa linha de raciocínio, a investigação proporciona ao aluno um envolvimento com o conhecimento matemático em questão muito além do contato superficial com a teoria. Atividades como a apresentada nesse trabalho, possível classes numerosas ou não, são propostas de baixo custo financeiro sem, no entanto, decréscimo de qualidade e viabilidade pedagógica.

Referências

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da Matemática**. Tradução Helena Castro. 3 ed. São Paulo: Blücher, 2012.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

D'AMBRÓSIO, Ubiratam. **Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade**. – 2. ed. 3ª reimp. – Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

ECO, Umberto. **Arte e Beleza na Estética Medieval**. Lisboa: Presença, 1989.

ENRIGHT, Carolyn. **Técnicas de arte no Egito antigo**. In: <
http://www.ehow.com.br/tecnicas-egito-antigo-info_6935/> Acesso em 09 de janeiro de 2012.

MENDES, Maria José e ROCHA, Maria Lúcia. **Isometria e homotetia**: trabalhando as transformações geométricas. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte.

PINHO, José Luiz Rosas et al. **Geometria I**. 2 ed. Florianópolis: EAD/UFSC/CED/CFM. 2010.

PONTE, João Pedro; et al. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

ROONEY, Anne. **A História da Matemática**: Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M.Books do Brasil, 2012.

SANTOS, Maria Madalena dos. **A matemática da arquitetura ideal**. Curitiba: Graphica, 2007. Disponível em
<http://www.degraf.ufpr.br/artigos_graphica/A%20MATEMATICA%20DA%20ARQUITETURA%20IDEAL.pdf>. Acesso em 15 de janeiro de 2012.