CONHECIMENTOS MOBILIZADOS DURANTE UMA FORMAÇÃO DOCENTE SOBRE POR QUÊS MATEMÁTICOS: O CASO DA DIVISÃO DE FRAÇÕES

<u>MORIEL JUNIOR, Jeferson Gomes</u>[1]

WIELEWSKI, Gladys Denise[2]

MONTES, Miguel[3]

Formação de Professores que Ensinam Matemática

Resumo: O objetivo do artigo é identificar e analisar tipos de conhecimento mobilizados por uma Professora de Matemática e por um Licenciando em Matemática durante uma formação sobre um por quê matemático a respeito da divisão de frações: Por que ao dividir uma fração por outra, deve-se conservar a primeira (numerador) e inverter a segunda (denominador) e multiplicar? Para isso, analisamos dois episódios usando o modelo teórico MTSK que é uma ferramenta de investigação analítica do conhecimento de professores de matemática. Os resultados indicam que todos os seis subdomínios do modelo estiveram presentes nos episódios, isto sugere que incluir discussões, estudos e elaboração de respostas sobre por quês matemáticos na formação docente pode contribuir para que professores e futuros professores construam conhecimentos que são necessários para ensinar matemática.

Palavras Chaves: Conhecimento especializado de professores de matemática – MTSK. Por quês matemáticos. Divisão de frações. Formação de professores de matemática.

INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta resultados parciais de uma pesquisa de doutorado desenvolvida pelo primeiro autor, sob orientação da segunda autora. O objetivo aqui é identificar e analisar tipos de conhecimento mobilizados por uma Professora de Matemática e por um Licenciando em Matemática durante uma formação sobre um por quê matemático a respeito da divisão de frações.

Para isso, selecionamos dois episódios extraídos de Oficinas oferecidas para professores. O primeiro tem como sujeito de pesquisa uma Professora de Matemática que expressa sua opinião a respeito de perguntas que alunos fazem em sala de aula e narra um caso em que foi questionada sobre um por quê matemático particular. O segundo episódio tem

[1] Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso – IFMT, *campus* Cuiabá. *Email*: jeferson.moriel@cba.ifmt.edu.br
[2] Doutora em Educação Matemática. Universidade Federal de Mato Grosso – UFMT em Cuiabá. *Email*: gladysdw@brturbo.com.br
[3] Mestre em "Investigación en Didáctica de las Matemáticas". Universidade de Huelva – Espanha. *Email*: miguel.montes@ddcc.uhu.es

como sujeito um Licenciando em Matemática e a discussão sobre uma resposta para a pergunta: *Por que ao dividir uma fração por outra, deve-se conservar a primeira (numerador) e inverter a segunda (denominador) e multiplicar?*

A teoria do *Conhecimento Especializado de Professores de Matemática* – MTSK[4] foi modelo utilizado para investigar analiticamente o conhecimento de professores que ensinam matemática, o qual descrevemos a seguir (CARRILLO et al., 2013; FLORES; ESCUDERO; CARRILLO, 2013; MONTES et al., 2013; MONTES; CONTRERAS; CARRILLO, 2013).

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA – MTSK

Dentre as diversas tipologias usadas para descrever o conhecimento de professores – por exemplo, as elaboradas por Gauthier (1998) ou Tardif (2007) –, a proposta por Shulman (1986; 1987) é a mais difundida e utilizada. Ela fez um grande avanço ao propor três categorias novas na década de 1980 – *conhecimento do conteúdo da matéria (SMK)*; *conhecimento curricular (CCK)*; *conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK)* –, indo além das dimensões já consolidadas em cursos de formação docente na época. Essa tipologia descreve o conhecimento necessário para qualquer professor ensinar e não focaliza uma área específica como a Física, Geografia ou Matemática. Diante disso, Deborah Ball e seus colaboradores desenvolveram um refinamento das categorias de Shulman propondo, assim, a teoria do *Conhecimento Matemático para o Ensino* – MKT (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; HILL; BALL; SCHILLING, 2008). O modelo MKT

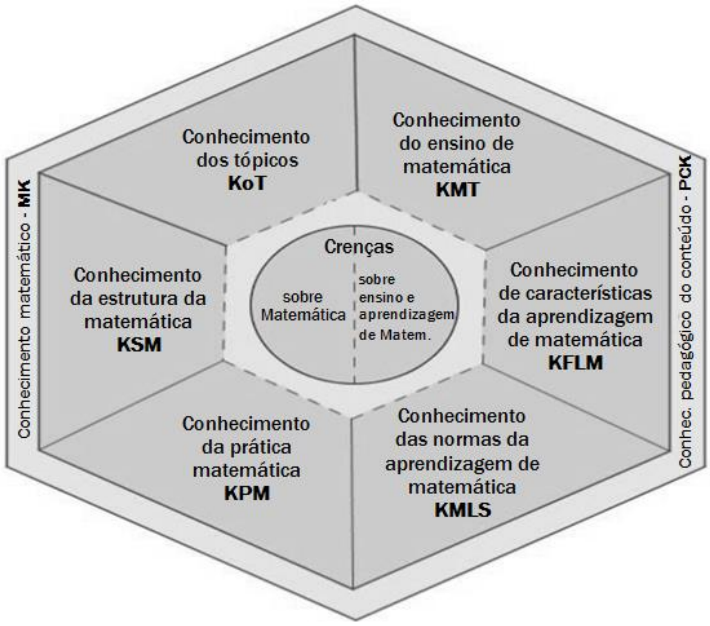
> [...] tem-se revelado especialmente poderoso para descrever o conhecimento necessário pelos professores em sua prática, reforçando seus laços com a matemática e, ao mesmo tempo, considerando outros elementos envolvidos no processo de ensino (por exemplo, os alunos e sua aprendizagem, e o currículo) e as conexões entre eles. E mais, o *Conhecimento Matemático para o Ensino* (MKT) foi pioneiro considerando o conhecimento matemático a partir do ponto de vista do ensino, incluindo o conhecimento da estrutura da matéria, as regras que regem como ele funciona, e uma reflexão cuidadosa sobre o conteúdo e as suas relações (CARRILLO et al., 2013, p. 1, tradução nossa).

Entretanto, pesquisas tem apontado limitações do MKT para investigar certos elementos do conhecimento de professores de matemática (CARRILLO et al., 2013; FLORES; ESCUDERO; CARRILLO, 2013; MONTES; CONTRERAS; CARRILLO, 2013). Visando superar tais restrições, o pesquisador espanhol Dr. José Carrillo junto com seu Grupo

[4] Utilizaremos em todo o texto as siglas originais oriundas da língua inglesa.

de Pesquisa[5] realizou uma reformulação e propôs o modelo do *Conhecimento Especializado de Professores de Matemática* – MTSK (Quadro 1). Ele possui dois domínios – *Conhecimento matemático* (MK) e *Conhecimento pedagógico do conteúdo* (PCK) – e as crenças dos professores sobre a matemática, seu ensino e aprendizagem são consideradas importantes, pois dão sentido às diferentes ações do professor e permeiam todos os subdomínios, detalhados a seguir.

Quadro 1. Subdomínios do MTSK (tradução nossa).



Os subdomínios do *Conhecimento Matemático* (MK) são definidos da seguinte forma (CARRILLO et al., 2013; FLORES; ESCUDERO; AGUILAR, 2013; MONTES; CONTRERAS; CARRILLO, 2013):

a) Conhecimento dos tópicos (KoT). Envolve conhecimento de aspectos fenomenológicos, significados de definições, de conceitos e de procedimentos matemáticos, juntamente com seus fundamentos teóricos correspondentes, bem como, exemplos (e nós incluiríamos contraexemplos também) que caracterizem aspectos do tópico abordado. Refere-se também ao conteúdo da disciplina de matemática contido em manuais e textos matemáticos. Inclui todo o conhecimento matemático desejável que um aluno saiba, em determinado nível, considerando uma concepção de matemática escolar na qual os alunos também aprendem a “por quês" de procedimentos e as razões para certos conceitos (por exemplo, por que é necessário que duas

[5] Intitulado “Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática” – SIDM, do qual o terceiro autor é integrante.

frações tenham o mesmo denominador para serem somadas, mas não precisam para serem multiplicadas?). Envolve também certo grau de formalismo que permite, por exemplo, reconhecer que a propriedade comutativa representa uma explicação mais técnica ao fato de que a ordem das parcelas numa soma não afeta o resultado. Este subdomínio focaliza o conhecimento de tópicos isoladamente, sendo que as conexões entre eles são contempladas no próximo subdomínio, o *conhecimento da estrutura da matemática*.

b) Conhecimento da estrutura da matemática (KSM). Inclui o conhecimento das principais ideias e estruturas matemáticas, tal como o conhecimento das propriedades e noções relativas a itens específicos que estão sendo abordados em certo momento ou o conhecimento das conexões entre tópicos atuais, anteriores e futuros. Também envolve a ideia de complexidade crescente, conforme explicado em Montes et al. (2013). Engloba a compreensão de conceitos matemáticos como sendo elementos integrantes de um sistema de conexões, ao invés de itens isolados. Isto possibilita desenvolver certos conceitos avançados a partir de uma perspectiva elementar e certos conceitos elementares por meio de ferramentas matemáticas avançadas. Implica ver o conteúdo em perspectiva, a matemática básica a partir de um ponto de vista avançado e a matemática avançada do ponto de vista básico. Este subdomínio incorpora uma parte do conhecimento horizontal (HCK) descrito por Ball e Bass (2009), sendo que outra parte, envolvendo as maneiras de proceder em matemática[6] é abarcada no próximo subdomínio: o *conhecimento da prática matemática*.

c) Conhecimento da pratica matemática (KPM). Completando o *conhecimento matemático* – MK, este subdomínio se refere às maneiras de proceder em matemática. Envolve o conhecimento das formas de conhecer, criar ou produzir na área da Matemática (conhecimento sintático), aspectos da comunicação matemática, raciocínio e prova, saber como definir e usar definições selecionar representações, argumentar, generalizar e explorar. O conhecimento sobre as relações ou conexões entre os conceitos pertence ao *conhecimento da estrutura da matemática* – KSM e devem ser distinguidos aqui do conhecimento sobre como tais relações são estabelecidas.

> Definido desta maneira, MK se estende por toda a gama de conhecimento matemático e abrange todo o universo da matemática, compreendendo conceitos e procedimentos, estruturação de ideias, conexões entre os conceitos, a razão para ou origem de procedimentos, significado de provas e qualquer forma de proceder em matemática, juntamente com a linguagem matemática e sua precisão. A denominação KoT enfatiza que o subdomínio é definido em termos puramente

[6] Carrillo et al (2013) esclarece que Ball e Bass (2009, p. 6, tradução nossa) mencionam quatro elementos que constituem o HCK: "uma sensação do ambiente matemático em torno do “local” atual na instrução; grandes ideias e estruturas disciplinares; práticas matemáticas importantes; valores e sensibilidades matemáticas fundamentais". No modelo MTSK, foram considerados os primeiros três elementos, uma vez que *valores e sensibilidades* significaria a introdução de um tipo diferente de elemento do resto dos componentes do modelo.

> matemáticos e pensamos que isto torna mais claro que o *conhecimento dos tópicos* e o *conhecimento da estrutura da matemática* formam um sistema complexo. (CARRILLO et al., 2013, p. 6, tradução nossa).

O seguinte exemplo ilustra a diferenciação entre KoT e KSM, bem como, contrasta-os com o *conhecimento pedagógico do conteúdo* (PCK):

> [...] saber que o produto de matrizes não é comutável pertence a KoT; saber que este caso é diferente da multiplicação de números naturais pertenceria ao *conhecimento da estrutura* (significa tomar um ponto de vista básico para a multiplicação de matrizes, como multiplicação de números) e saber que os alunos acreditam que o produto de matrizes é comutativa porque extrapolam esta propriedade da multiplicação de números (o que eles aprendem na escola) faria parte do *conhecimento pedagógico do conteúdo* (como vamos agora explicar). (CARRILLO et al., 2013, p. 6, tradução nossa).

Os subdomínios ligados ao *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo* (PCK) são definidos a seguir (CARRILLO et al., 2013; FLORES; ESCUDERO; AGUILAR, 2013; MONTES; CONTRERAS; CARRILLO, 2013):

d) Conhecimento do Ensino de Matemática (KMT). KMT não é o conhecimento matemático, embora este seja necessário. Envolve o conhecimento de como o ensino pode ou deve ser realizado, bem como, estratégias de ensino diversas que auxilie o aluno no desenvolvimento de suas capacidades procedimentais e conceituais em matemática. Inclui conhecer recursos que permitem ao professor escolher uma representação particular ou determinado material para o ensino de um conceito ou procedimento matemático, além de permitir a seleção de exemplos ou escolher um livro. Trata-se da integração da matemática e do ensino e está associado em grande parte ao *conhecimento de conteúdo e ensino – KCT* do modelo de Ball e colaboradores (MKT). Neste subdomínio podemos localizar o conhecimento de recursos do ponto de vista do seu conteúdo matemático ou do conhecimento de abordar uma série estruturada de exemplos para ajudar os alunos a compreender o significado de um item de matemática.

e) Conhecimento das características de aprendizagem de matemática (KFLM). KFLM deriva da necessidade do professor entender como os alunos pensam quando são envolvidos com atividades e tarefas matemáticas. É importante que o professor tenha consciência de que os alunos podem ter problemas com um determinado tópico e isso exige o conhecimento de como os alunos aprendem os conteúdos matemáticos, as características desse processo de compreensão, erros comuns, dificuldades, obstáculos e a linguagem normalmente usada pelos estudantes ao lidar com cada conceito. Esta consciência é alimentada pelo conhecimento geral do professor sobre o conteúdo e pela sua familiaridade com os alunos. Este subdomínio engloba uma gama de conhecimentos, incluindo teorias ou modelos de como os alunos aprendem matemática – por exemplo, a teoria APOS (ASIALA et al., 1996). Não é uma questão de saber essas teorias ou perspectivas, mas sim o seu significado, ou seja, o que essas teorias contribuem para descrever o processo de aprendizagem da matemática. KFLM não é o conhecimento matemático, embora o professor precise ter uma formação matemática a fim de compreendê-la e colocá-la em uso. O *conhecimento de conteúdo e estudantes – KCS* (do modelo MKT) se refere a conteúdo e alunos, enquanto este subdomínio (KFLM) está preocupado com a forma como a matemática é aprendida, isto é, com a identificação das características da aprendizagem matemática.

f) Conhecimento de normas de aprendizagem de matemática (KMLS). KMLS abrange o conhecimento das especificações curriculares envolvendo o que está previsto em cada etapa da educação escolar em termos de conteúdos e competências (conceituais, procedimentais, atitudinais e de raciocínio matemática nos diversos momentos educativos), normas mínimas e as formas de avaliação que possibilitam a progressão de um ano para outro, da mesma forma que o *conhecimento curricular* está no modelo de Ball. No entanto, KMLS amplia o conhecimento dos objetivos e normas de aprendizagem para além do contexto institucional do professor. Neste subdomínio estão inclusos os resultados de pesquisas na área de Educação e Educação Matemática, opinião de professores experientes sobre sucessos no ensino, além dos objetivos e medidas de desempenho desenvolvidos por organismos externos, como associações profissionais, pesquisadores e agências educacionais.

Por considerar avanços e propostas provenientes de modelos relevantes (como Lee Shulman e Deborah Ball), optamos por utilizar o MTSK como modelo teórico para estudar analiticamente o conhecimento de professor de matemática, cujos procedimentos metodológicos estão descritos a seguir.

ENCAMINHAMENTO METODOLÓGICO

A coleta de dados foi realizada pelo primeiro autor deste artigo (que passamos a chamar de Pesquisador), durante a realização de duas oficinas (2 horas cada) a respeito de um por quê matemático sobre divisão de frações. As oficinas fizeram parte de um evento de formação docente oferecido pelo projeto “Observatório da Educação”, desenvolvido pela Universidade Federal de Mato Grosso - UFMT. Este evento reuniu professores de todas as áreas, além de licenciandos (bolsistas do projeto) de matemática e pedagogia.

A escolha do por quê matemático foi feita com base em resultados de avaliações que os integrantes do Projeto realizaram nas escolas atendidas, por meio das quais foi detectada grande dificuldade dos alunos (5º e 9º anos) em relação a números racionais, decimais e frações. Portanto, nossa escolha não foi arbitrária ou aleatória, mas sim, realizada com o intuito de suprir uma necessidade de formação.

O instrumento de coleta de dados foi a gravação audiovisual das oficinas. Em seguida, transcrevemos participações dos envolvidos e selecionamos *episódios* (MOURA, 2005) nos quais encontramos momentos de "ações reveladoras do processo de formação dos sujeitos participantes" (MOURA, 2005, p. 272) visando atingir nosso objetivo: *identificar e analisar os tipos de conhecimento mobilizados durante uma formação sobre por quês matemáticos*.

Embora não tenha sido possível restringir a inscrição na oficina somente para profissionais envolvidos com o ensino de matemática (dado o caráter multidisciplinar do evento), optamos por analisar episódios que dizem respeito ao nosso grupo de interesse. Nesse estudo temos dois sujeitos de pesquisa: uma Professora de Matemática e um Licenciando em Matemática.

Assim como a pesquisa de (MORETTI; MOURA, 2011), esta investigação não pode ser considerada colaborativa – como proposto por (FIORENTINI, 2004; GARRIDO; PIMENTA; MOURA, 2000), dentre outros –, uma vez que a autoria e o processo de escrita foram "reservados a uma única pessoa" (FIORENTINI, 2004, p. 66). Entretanto, o trabalho desenvolvido pelo grupo nas oficinas apresenta aspectos colaborativos, uma vez que

> [...] os integrantes de um grupo colaborativo assumem um mínimo de protagonismo no grupo, não se reduzindo a meros auxiliares ou fornecedores de dados e materiais, mas como sujeitos que não apenas aprendem, mas também produzem conhecimentos e ensinam os outros (FIORENTINI, 2004, p. 61).

Com base nestes encaminhamentos metodológicos apresentamos a seguir a análise dos dados usando o modelo teórico MTSK para explorar analiticamente os conhecimentos especializados de professores de matemática mobilizados ou construídos durante os dois episódios de formação.

CONHECIMENTOS MOBILIZADOS DURANTE UMA FORMAÇÃO SOBRE POR QUÊS MATEMÁTICOS

O primeiro episódio analisa a resposta de uma Professora para a pergunta do Pesquisador sobre *sua opinião a respeito das perguntas que alunos fazem em sala de aula*. O segundo focaliza um momento da discussão sobre: *Por que ao dividir uma fração por outra, deve-se conservar a primeira (numerador) e inverter a segunda (denominador) e multiplicar?*

Episódio 1: Sobre as perguntas dos alunos

Este episódio foi extraído da primeira Oficina realizada e apresenta a resposta de uma Professora quando o pesquisador pediu para os participantes expressassem *suas opiniões a respeito das perguntas que alunos fazem em sala de aula*. Isto também foi uma forma do Pesquisador estabelecer um vínculo de respeito e valorização das vivências dos participantes, algo que ajudou a deixa-los mais à vontade para interagir, criando um ambiente propício para a coleta de dados.

> *Pesquisador*: Como vocês lidam com essas perguntas (por quês dos alunos)? Vocês gostam que os alunos façam perguntas, ou não?
>
> *Professora*: Eu acho que as perguntas são benvindas, os por quês no ensino. Eu, assim... eu como professora nunca sou aquela que esgota todos os por quês. [...] Eu sempre gosto de dar exemplo e contraexemplo em todas as situações [de ensino]. E às vezes, assim, a gente tem que ter a humildade, igual foi colocado [por outro participante], que tem por quês que a gente não se fez ainda e ninguém nunca fez e aí é feito. Pode ser muito elementar e às vezes a gente nunca teve passado pela situação de questionamento sobre aqueles aspectos. Às vezes algo que a gente não visualiza como uma dificuldade. Teve um aluno que [questionou] a fórmula geométrica, por exemplo, da área de retângulo: base vezes altura, e por que a gente usa o H e não o A? E eu nunca tinha percebido que isso pode ser algo que dificulta o processo de aprendizagem. Porque na memorização da fórmula, [...] B é o da base e por quê esse H?! Não é da altura?! Então aí, assim... são alguns por quês... Porque às vezes [a gente] não faz [questionamentos assim], usa mecanicamente como aprendeu e não percebe que aquilo pode ser um empecilho pra um aprendizado do nosso aluno.

A Professora relata que acha importante que os alunos façam perguntas em sala de aula, inclusive os por quês matemáticos, e afirma que frequentemente utiliza exemplos e contraexemplos de conteúdos matemáticos em suas aulas. Conhecer ou saber elaborar uma gama de exemplos e contraexemplos para conceitos matemáticos pertence ao *conhecimento de tópicos* – KoT. Além disso, parece que ela acredita que usar essa estratégia (de apresentar exemplos e contraexemplos) auxilia na aprendizagem dos alunos. O conhecimento que permite a professora optar por uma série particular de (contra)exemplos, ao invés de usar outros recursos e materiais, para ajudar os alunos a compreenderem o significado de algum tópico matemático faz parte do subdomínio *conhecimento do ensino de matemática* – KMT

A docente admite que muitos professores, inclusive ela, não conhecem a razão de certos procedimentos, tampouco, a resposta de por quês matemáticos. Isso indica que professores tem deficiências em relação a conhecimentos necessários para responder por quês de matemática escolar (pertencente ao KoT) e sugere que a discussão sobre questionamentos de estudantes não ocorreu durante a formação da docente (inicial ou continuada). Isto reforça os resultados de pesquisas que indicam pouca ou nenhuma atenção que tem sido dada aos por quês matemáticos dos estudantes durante a formação de professores (ANGELO; DOS SANTOS; MELÃO, 2009; LORENZATO, 1993; MOREIRA, 2004).

Ela relatou a pergunta de um aluno sobre a fórmula da área de um retângulo (base vezes altura) – Por que usar a letra ‘H’ para a altura ao invés de ‘A’? – e afirmou que nunca tinha percebido que usar a letra ‘H’ poderia interferir na aprendizagem do aluno. Este caso contribuiu para que ela desenvolvesse a consciência de que existem dúvidas dos estudantes em relação a conceitos que podem se tornar dificuldades de aprendizagem. Esta consciência está incluída no *conhecimento das características da aprendizagem matemática* - KFLM.

Segundo a docente, às vezes os professores não dão a devida atenção para um por quê matemático por considera-lo muito elementar. A própria professora dá indícios de que isto é um erro e pode interferir negativamente no ensino e na aprendizagem de matemática. Este erro pode estar associado a uma visão dos conceitos matemáticos como elementos isolados, ao invés de vê-los como um sistema de conexões.

Ainda que pareçam elementares, por quês matemáticos de estudantes podem ter diversas abordagens de respostas (ARCAVI; BRUCKHEIMER, 1981; MORIEL JUNIOR; WIELEWSKI, 2011; MORIEL JUNIOR; WIELEWSKI, 2013) e cada uma delas pode estar baseada na conexão entre diferentes conceitos matemáticos. Isto exige uma visão em perspectiva da matemática e o conhecimento de ferramentas matemáticas adequadas (tanto simples, quanto complexas) para analisar tópicos matemáticos sem subestima-los. Este tipo de conhecimento faz parte do subdomínio *conhecimento da estrutura matemática* – KSM.

Ilustramos isso com as respostas apresentadas em Lima (1982) para uma pergunta “aparentemente elementar”: *Por quê 0^0 é indeterminado*? A primeira utiliza um conceito mais simples (definição de divisão de números). A segunda envolve conceitos mais complexos e tem uma “raiz mais profunda, advinda da teoria dos limites em virtude da qual $\frac{0}{0}$ e 0^0, (bem como outras fórmulas análogas) são expressões indeterminadas” (LIMA, 1982, p. 6). Este exemplo evidencia conexões entre conceitos matemáticos elementares (divisão de números e potenciação) e complexos (limites de funções).

Episódio 2: Por que inverter e multiplicar para dividir frações?

Este episódio foi extraído da segunda Oficina e teve como ponto de partida a questão: *Por que ao dividir uma fração por outra, deve-se conservar a primeira (numerador) e inverter a segunda (denominador) e multiplicar?* Dois participantes foram à lousa tentar formular alguma resposta – um Licenciando em Matemática e um Professor de Matemática –, mas sem sucesso. Outros professores levantaram a possibilidade de usar o inverso da multiplicação (ou inverso multiplicativo), mas sem conseguirem ir adiante também.

Conhecer a razão de certos procedimentos matemáticos e saber a resposta de por quês matemáticos fazem parte, por definição, do subdomínio *conhecimento de tópicos* (KoT) no modelo MTSK. Logo, a falta de respostas adequadas indicou limitações neste subdomínio. Por outro lado, os professores mencionarem alguns conceitos matemáticos úteis para responder o *por quê* e isso fez com que o Pesquisador colocasse em discussão algumas respostas elaboradas a partir de trabalhos de pesquisadores, de professores de matemática experientes (MORIEL JUNIOR; WIELEWSKI, 2013) e da sua experiência como docente. Uma delas está no Quadro a seguir.

Quadro 2. Resposta extraída de Barbosa (2011, p. 9-10) para o por quê da divisão de frações.

Usando o exemplo $\frac{3}{5} \div \frac{2}{7}$. Uma professora explicou:

Inicialmente, temos o seguinte $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{7}}$ =, mas não sabemos fazer divisão com frações, no entanto, existe um resultado de divisão que nós conhecemos **que é todo número dividido por 1 é ele mesmo**. Então vamos fazer o denominador virar 1. Para isso o que precisamos fazer? Olha se eu multiplicar um número pelo inverso dele não vai dar 1? Qual é o inverso de dois sétimos? Sete meios, não é? Então, vamos multiplicar o numerador e o denominador por sete meios. **Pela equivalência de frações** sabemos que ao multiplicar, um mesmo número, no numerador e no denominador, não altera o resultado da fração. Então é só multiplicar o sete meios no denominador e numerador. [A professora fala e escreve na lousa ao mesmo tempo]

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{7}{2}}{\frac{2}{7} \times \frac{7}{2}}$$

Aí multiplicando nós temos olha só! No denominador vai ficar 1, porque quatorze dividido por quatorze é um. Não é? [Fala e continua escrevendo na lousa]

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{7}{2}}{\frac{2}{7} \times \frac{7}{2}} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{7}{2}}{1}$$

Agora temos que é o numerador dividido por um, como todo número dividido por um é ele mesmo, então nós podemos fazer: [enquanto falava escreveu na lousa]

$$= \frac{\frac{3}{5} \times \frac{7}{2}}{1} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{2} = \frac{21}{10}$$

Então, é por isso, que foi ficando essa regra, pois o resultado é sempre o numerador vezes o inverso do denominador.

Na sua tentativa de responder ao por quê um Licenciando em Matemática mencionou o conceito de equivalência de frações e a ideia de "quantas vezes cabe?" (por exemplo, quantas vezes 2 cabe no 6, para se referir à divisão 6÷2). Ambos podem ser enquadrados no subdomínio *conhecimento de tópicos* – KoT, sendo que o segundo diz respeito a uma forma elementar de dar significado para o conceito de divisão e fração (HIRATSUKA, 1996; LIMA, 1983; SÁ, 2012). Embora estes conceitos sejam a base de algumas respostas para o por quê matemático em questão (BARBOSA, 2011; CARAÇA, 2000; LIMA, 1983; PURITZ, 2005; SÁ, 2012; WU, 2007), ficou claro que saber tais itens é apenas uma parte do conhecimento que o professor precisa para construir as respostas, sem os quais não é possível sanar essa dúvida dos alunos.

Ao descrever a experiência que teve durante a Oficina, o Licenciando se refere à resposta apresentada no Quadro 2 da seguinte forma:

> Eu já tinha uma noção que ia ter que resolver por esse caminho só que eu tinha esquecido do inverso multiplicativo. [...] Isso aí eu sei, eu uso isso na faculdade direto. [...] Quando a gente está falando de criança, a gente fica com a ideia muito fechada. Se eu tivesse lembrado que os racionais é um corpo e todo corpo tem um inverso multiplicativo ia ter que sair de alguma forma [a resposta ao por quê] desse jeito.

Neste fragmento, o licenciando argumenta que conhece e sabe usar o principal conhecimento de matemática escolar envolvido na resposta – o inverso multiplicativo –, além de conhecer fundamentos algébricos – ideia de corpo –, ambos enquadrados no *conhecimento de tópico* – KoT. Ele também estabeleceu conexões entre conceitos da educação básica (números racionais e inverso multiplicativo) e o conceito algébrico de corpo na última frase apresentada. O conhecimento que lhe permitiu interpretar a matemática elementar de um ponto de vista avançado pertence ao *conhecimento da estrutura matemática* – KSM. Ele também parece ter uma ideia intuitiva de como se realiza esta demonstração, em relação à lógica da mesma, embora não recorde o uso da propriedade específica envolvida (inverso multiplicativo), algo que pertence ao *conhecimento da prática matemática* – KPM.

CONCLUSÕES

Por meio do modelo MTSK identificamos e analisamos os tipos de conhecimento mobilizados por uma Professora de Matemática e por um Licenciando em Matemática durante uma formação sobre um por quê matemático a respeito da divisão de frações. Encontramos todas as dimensões do modelo e, embora tenhamos apresentado apenas dois episódios, foi possível associar certos conhecimentos a determinados subdomínios:

- Conhecer os conceitos envolvidos na resposta do por quê matemático sobre divisão de frações (como o inverso multiplicativo, interpretação, equivalência e multiplicação de frações) faz parte do KoT;
- Conhecer conexões entre conceitos da educação básica (números racionais e inverso multiplicativo) e da matemática do ensino superior (corpo) está incluído no KSM;
- Conhecer dúvidas dos alunos sobre o conteúdo que podem se tornar dificuldades de aprendizagem, como é o caso da fórmula da área de um retângulo (base vezes altura), na qual se usa a letra 'H' para a altura ao invés de "A". Conhecimentos desse tipo fazem parte do subdomínio *conhecimento das características da aprendizagem matemática* - KFLM
- Conhecer os diversos métodos ou tipos de abordagem de resposta ao por quê matemático (caminho aritmético, algébrico, geométrico, concreto, indução por meio de uma sequencia de exemplos, dentre outros), pertence ao subdomínio KMT;
- Saber escolher quais dos métodos anteriores é mais adequado para ensinar a resposta ao aluno, respeitando sua idade e os conhecimentos necessários prescritos pelo currículo, pertence ao KMLS;
- Conhecer orientações envolvidas no desenvolvimento de uma demonstração matemática, relacionadas a aspectos lógicos, pertence ao KPM.

Estes seis subdomínios encontrados em nossa pesquisa são indícios de que incluir na formação docente discussões, estudos e elaboração de respostas sobre por quês matemáticos de estudantes pode contribuir para que professores e futuros professores construam conhecimentos que são necessários quando se ensina matemática. Além disso, nossos resultados podem ajudar a aumentar o *corpus* de exemplos que podem ser associados aos subdomínios do modelo MTSK.

REFERÊNCIAS

ANGELO, C. L.; DOS SANTOS, J. R. V.; MELÃO, W. S. Licenciandos em Matemática e Situações da Matemática Escolar: um Estudo Exploratório sobre a Formação Inicial de Professores de Matemática. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia,** v. 2, n. 3, p. 41-59, 2009. Disponível em: < http://revistas.utfpr.edu.br/pg/index.php/rbect/article/view/552 >.

ARCAVI, A.; BRUCKHEIMER, M. How shall we teach the multiplication of negative numbers? **Mathematics in School,** v. 10, n. 5, p. 31-33, 1981. Disponível em: < http://www.jstor.org/stable/30214312 >. Acesso em: 10 Mai. 2012.

ASIALA, M.; BROWN, A.; DEVRIES, D.; DUBINSKY, E.; MATHEWS, D.; THOMAS, K. A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. **Research in collegiate mathematics education,** v. 2, n. 3, p. 1-32, 1996.

BALL, D. L.; BASS, H. With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. **Paper prepared based on keynote address at the 43rd Jahrestagung für Didaktik der Mathematik held in Oldenburg, Germany**, 2009.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? **Journal of teacher education,** v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BARBOSA, E. P. Os Por Quês Matemáticos dos Alunos na Formação dos Professores. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - CIAEM, 13., 2011, Recife. **Anais...** Recife, 2011. p. 1-12. Disponível em: < http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/files/conferences/1/schedConfs/1/papers/611/public/611-9763-1-PB.pdf >.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Gradiva, 2000.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L.; MUÑOZ-CATALÁN, M. Determining Specialised Knowledge For Mathematics Teaching. In: CONGRESS OF EUROPEAN RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION - CERME, 8., 2013, Manavgat-Side, Antalya - Turkey. **Conference proceedings** Manavgat-Side, Antalya - Turkey, 2013. p. 1-10. Disponível em: < http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG17/Wg17_Climent.pdf >.

FIORENTINI, D. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente. **Pesquisa qualitativa em educação matemática. Belo Horizonte: Autêntica**, p. 47-76, 2004.

FLORES, E.; ESCUDERO, D. I.; AGUILAR, A. Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. In: Simposio de Investigación en Educación Matemática, 17., 2013, Bilbao, Espanha. **Conference proceedings.** Bilbao, Espanha, 2013. p. Aceito para publicação.

FLORES, E.; ESCUDERO, D. I.; CARRILLO, J. A theoretical review of specialised content Knowledge. In: CONGRESS OF EUROPEAN RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION - CERME, 8., 2013, Manavgat-Side, Antalya - Turkey. **Conference proceedings** Manavgat-Side, Antalya - Turkey, 2013. p. 1 - 10. Disponível em: < http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG17/WG17_Escudero.pdf >.

GARRIDO, E.; PIMENTA, S. G.; MOURA, M. O. A pesquisa colaborativa na escola como abordagem facilitadora para o desenvolvimento da profissão do professor. **Educação continuada. Campinas: Papirus**, p. 89-112, 2000.

GAUTHIER, C. **Por uma teoria da pedagogia: pesquisas contemporâneas sobre o saber docente**. Editora Unijuí, 1998.

HILL, H. C.; BALL, D. L.; SCHILLING, S. G. Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. **Journal for Research in Mathematics Education**, p. 372-400, 2008. Disponível em: < http://www.ugr.es/~pflores/2008_9/Master_Conocim/textos%20JP/%5B1%5D_Hill-Ball-Schilling-JRME2008-07.pdf >.

HIRATSUKA, P. I. Fazendo uma divisão de frações significativa. **REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA,** v. 30, p. 23-25, 1996.

LIMA, E. L. Alguns porquês. **Revista do Professor de Matemática,** v. 1, n. 1, 1982.

______. Divisão de números racionais escritos na forma de frações. **REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA,** v. 3, p. 40-42, 1983.

LORENZATO, S. Os "Por quês" matemáticos dos alunos e as respostas dos professores. **Pro-Posições,** v. 4, n. 1, p. 73-77, 1993.

MONTES, M.; AGUILAR, A.; CARRILLO, J.; MUÑOZ-CATALÁN, M. MTSK: from common and horizon knowledge to knowledge of topics and structures. In: CONGRESS OF EUROPEAN RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION - CERME, 8., 2013, Manavgat-Side, Antalya - Turkey. **Conference proceedings** Manavgat-Side, Antalya - Turkey, 2013. p. 1-10. Disponível em: < http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG17/WG17_Montes.pdf >.

MONTES, M.; CONTRERAS, L.; CARRILLO, J. Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. In: Simposio de Investigación en Educación Matemática, 17., 2013, Bilbao, Espanha. **Conference proceedings.** Bilbao, Espanha, 2013. p. Aceito para publicação.

MOREIRA, P. C. **O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica**. 2004. (Doutorado). Universidade Federal de Minas Gerais.

MORETTI, V. D.; MOURA, M. O. professores de matemática em atividade de ensino: contribuições da perspectiva histórico-cultural para a formação docente. **Ciência & Educação,** v. 17, n. 2, p. 435-450, 2011.

MORIEL JUNIOR, J. G.; WIELEWSKI, G. D. Duas perspectivas de respostas para a pergunta 'por que menos vezes menos dá mais?'. In: SEMINÁRIO EDUCAÇÃO - SEMIEDU, 19., 2011, Cuiabá. **Anais...** Cuiabá, 2011.

MORIEL JUNIOR, J. G.; WIELEWSKI, G. D. Por quês matemáticos na Revista do Professor de Matemática. **Revista de Educação Pública,** v. No Prelo, 2013.

MOURA, M. O. Pesquisa colaborativa: um foco na ação formadora. In: BARBOSA, R. L. L. (Ed.). **Trajetórias e Perspectivas Da Formação de Educadores**. São Paulo: Editora Unesp, 2005. p.257-284.

PURITZ, C. Dividing by Small Numbers—and Why Not by 0? **Mathematics in School,** v. 34, n. 5, p. 2-4, 2005. Disponível em: < http://www.jstor.org/stable/30215826 >. Acesso em: 10 Maio 2012.

SÁ, I. P. D. **Voltando aos "porquês" nas aulas de matemática**. f. 2012

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational researcher,** v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986. Disponível em: < http://www.itp.wceruw.org/documents/Shulman_1986.pdf >.

______. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. **Harvard educational review,** v. 57, n. 1, p. 1-23, 1987.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Vozes, 2007.

WU, H. "Order of operations" and other oddities in school mathematics. **Retrieved July,** v. 3, p. b1-11, 2007.